3.0
Conceptos Generales
De Curvas

Definición
El. definitorios
Representación
Aproximaciones
Cadenas
Fijas / libres
Curvas libres

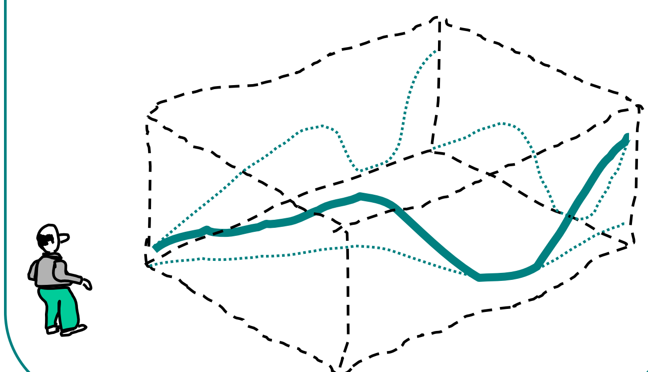
Las curvas son líneas
que cambian de dirección

En general están contenidas en espacios de tres dimensiones

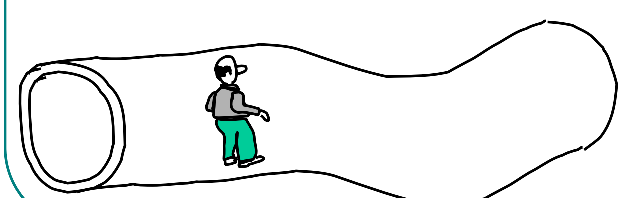
⟷

Por ser líneas, son formas geométricas unidimensionales

Desde "fuera" se ve que ocupan un volumen



Desde "dentro" se ve que sólo hay una dimensión y dos sentidos: avanzar o retroceder



Los elementos definitorios son el conjunto de elementos geométricos que definen una curva

Por ejemplo,
el centro y el radio definen una circunferencia

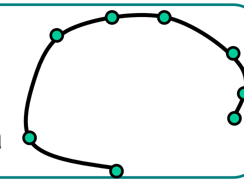
Son importantes porque, en general, se crean o editan las curvas CAD mediante sus elementos definitorios

En las aplicaciones CAD suelen estar ocultos por defecto y se muestran durante el proceso de edición

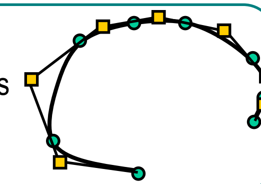
Los elementos definitorios más habituales son:

- Puntos
  - Nodos
  - Puntos de control
- Rectas
  - Elemento rectilíneo
  - Secante
  - Tangente
  - Normal
- Planos
  - Plano osculador
  - Plano tangente
  - Plano normal
- Ángulos
  - Ángulo de contingencia
  - Ángulo de torsión

Los Nodos o Polos son puntos de la propia curva



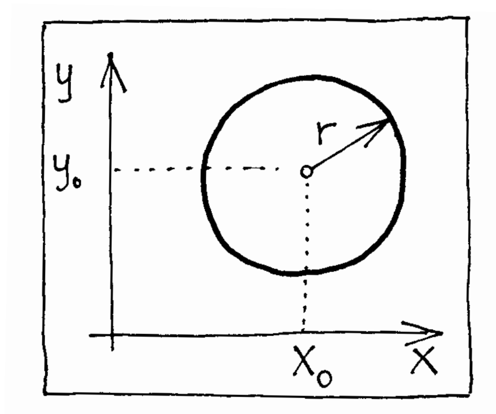
Son puntos vinculados a elementos definitorios de la curva, pero que no pertenecen a ella



Más detalles sobre elementos definitorios en 3.0.1

Las curvas puede representarse de dos maneras:

gráfica ⟷ matemática



$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

El lenguaje gráfico es más amigable para el diseñador ⟷ El lenguaje matemático es necesario para programar nuevas curvas

Por eso es el que se usa prioritariamente en las aplicaciones CAD, mediante interfaces de interacción gráfica

En la representación matemática se pueden usar diferentes formulaciones:

Explícita	$F_1(x,y)=x$ $F_2(x,z)=y$ $F_3(x,y)=z$	$x=x_0 \pm \sqrt{r^2-(y-y_0)^2}$ $y=y_0 \pm \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$
Implícita	$F_1(x,y,z)=0$ $F_2(x,y,z)=0$ $F_3(x,y,z)=0$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
Paramétrica	$x=f_1(t)$ $/ T_1 \leq t \leq T_2$ $y=f_2(t)$ $z=f_3(t)$	$x=r \operatorname{sen} t + x_0$ $y=r \cos t + y_0$ $t \in [0,2\pi]$
Diferencial	$dx/ds=t$ $\left.\begin{array}{l} dt/ds=kn \\ dn/ds=-kt+\tau b \\ db/ds=-\tau n \end{array}\right\}$ Fórmulas de Frenet	t= vector tangente n= vector normal b= vector binormal k= curvatura de flexión τ= curvatura de torsión

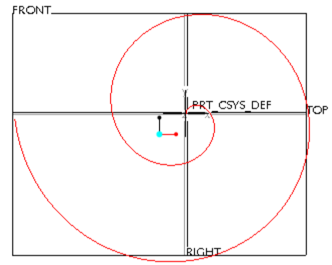
¡La forma PARAMÉTRICA es la más usada para definir curvas en aplicaciones CAD!

Por ejemplo, para definir la espiral de Arquímedes hay que programar la siguiente formulación paramétrica:

$x = r\,t\,\mathrm{sen}\,t + x_0$

$y = r\,t\,\cos t + y_0$

$t \in [0,(1+3/4)\pi]$



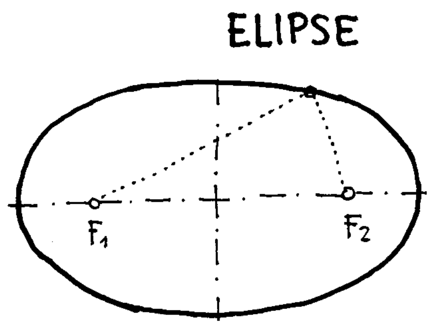
El código a programar sería semejante al siguiente:

```
r= DATO

xcero= DATO

ycero= DATO

tt= (1+3/4)*360*t

x= r*tt*sin(tt)+xcero

y= r*tt*cos(tt)+ycero
```

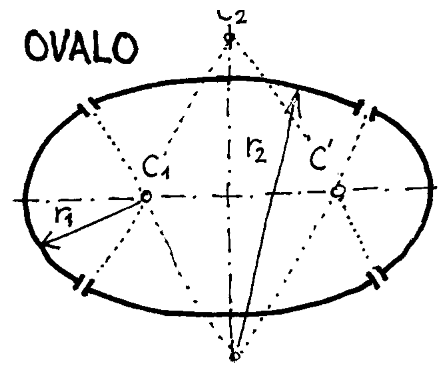
$t \in [0,1]$

Las curvas pueden representarse mediante aproximaciones:

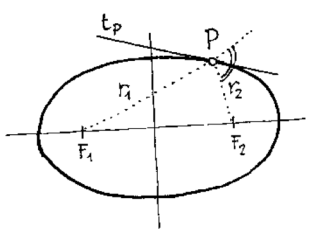
exacta ⟷ aproximada

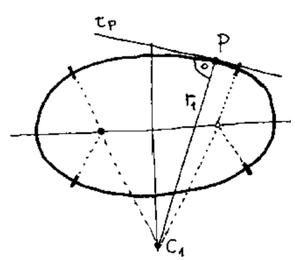


≅



⚠ Sólo las operaciones sobre curvas exactas dan resultado exacto



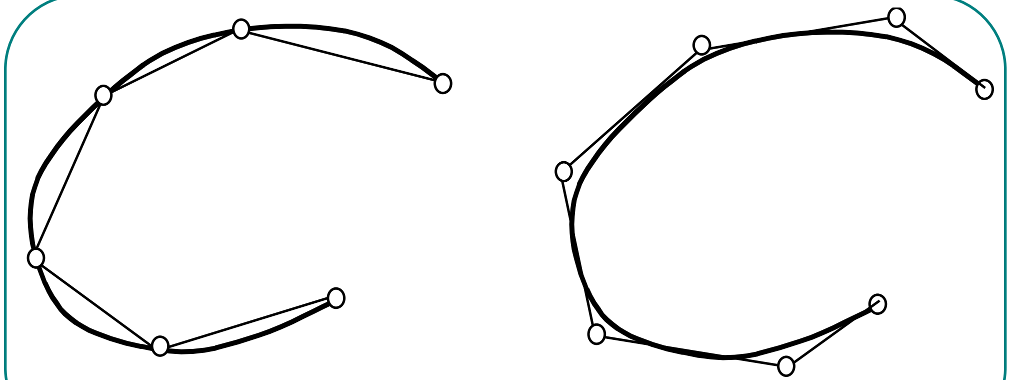


La tangente a una elipse no es igual que la tangente a un óvalo

Es útil para trabajar con curvas que no podemos representar con exactitud

Por ejemplo, curvas que no están programadas en una aplicación CAD

Las aproximaciones tradicionales de las curvas se obtienen con puntos y rectas:



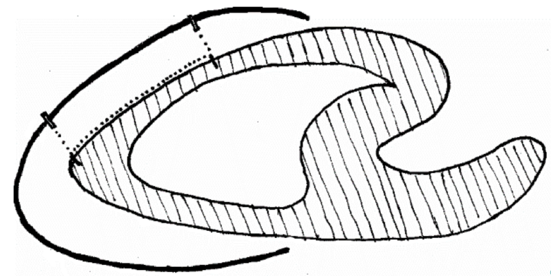
Los puntos pueden ser nodos o puntos de control

Si el número de puntos es suficientemente elevado,
la aproximación puede resultar
tan precisa como se quiera

Es decir, si los segmentos son suficientemente cortos

Para aumentar la precisión sin aumentar el número de puntos o segmentos se sustituyen los segmentos de recta por "segmentos curvos"

Las plantillas de curvas ya permitían hacerlo en la delineación “clásica”, pero se ha potenciado mucho con el CAD



Los segmentos curvos siguen siendo formas aproximadas, pero tienen varias ventajas:

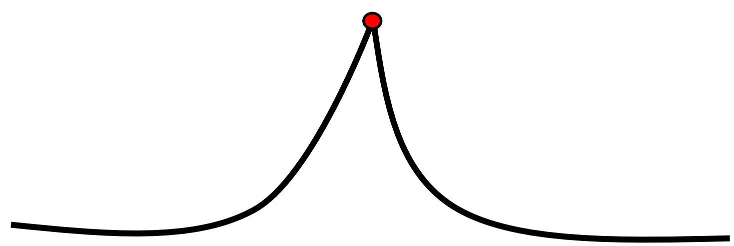
1 Utilizan menos almacenamiento
(porque consiguen la misma precisión con menos tramos)

2 Simplifican el tratamiento por ordenador

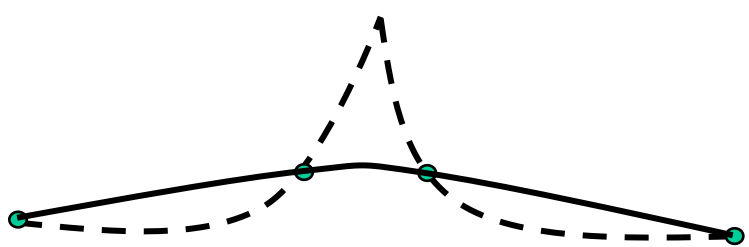
3 Permiten considerar diferentes propiedades de la forma
(como la continuidad, la suavidad, etc.)

Cuando se aproxima una curva hay que prestar especial atención a los puntos singulares

Puntos singulares son aquellos en los que la curva sufre un cambio brusco



¡Aproximar una curva sin determinar sus puntos singulares puede dar lugar a muy malas aproximaciones!



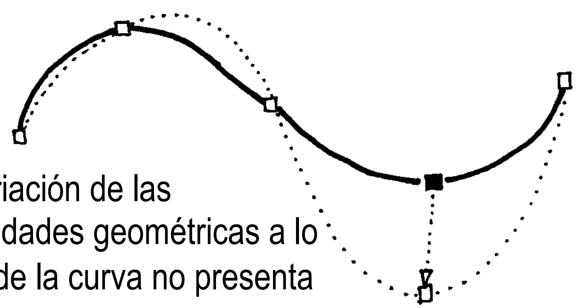
Más detalles sobre puntos singulares en 3.0.2

Las curvas pueden descomponerse en cadenas de curvas:

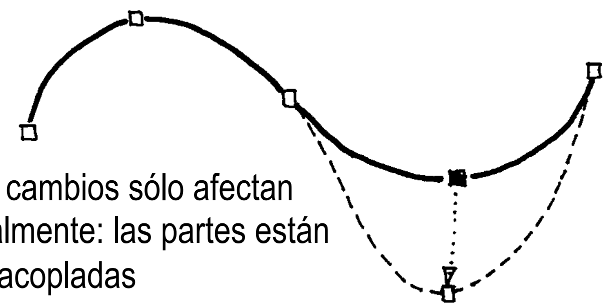
Global ⟷ Por partes

la curva es
una sola figura

la curva se descompone en un conjunto de segmentos rectilineos o curvilineos encadenados



La variación de las propiedades geométricas a lo largo de la curva no presenta discontinuidades

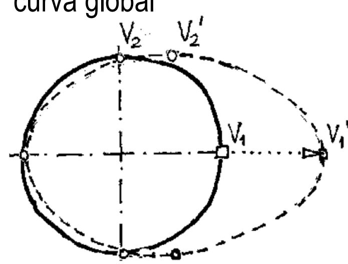


Los cambios sólo afectan localmente: las partes están desacopladas

El tratamiento por partes **no** es necesariamente aproximado…

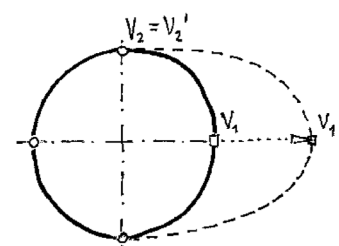
…pero **si** es diferente

Una circunferencia es una curva global



Al “estirar” una circunferencia se obtiene una elipse

Dos semicircunferencias concéntricas y del mismo radio describen la circunferencia completa



Al estirar una de las dos semicircunferencias se obtiene un ovoide

Una forma práctica de clasificar las condiciones de encadenamiento de las curvas es definir el "grado de continuidad"

Habitualmente se consideran cuatro niveles o grados crecientes de continuidad:

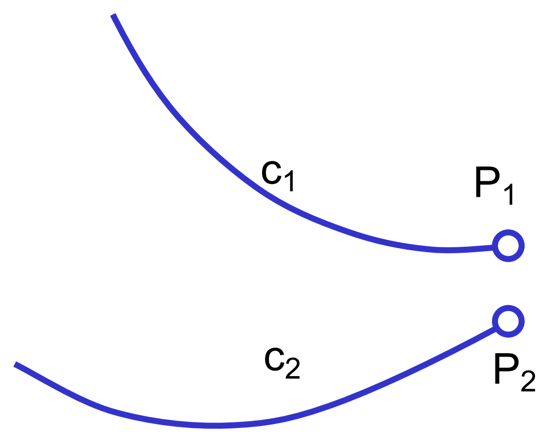
C^0 NULA

C^1 POSICIONAL

C^2 TANGENCIAL

C^3 DE CURVATURA

Los dos tramos no tienen punto en común



Una forma práctica de clasificar las condiciones de encadenamiento de las curvas es definir el “grado de continuidad”

Habitualmente se consideran cuatro niveles o grados crecientes de continuidad:

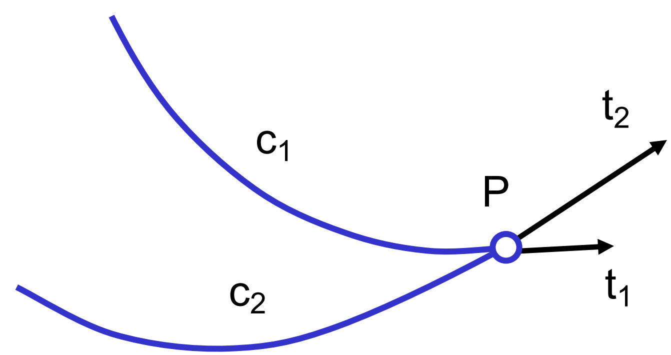
C^0 NULA

C^1 **POSICIONAL**

C^2 TANGENCIAL

C^3 DE CURVATURA

Ambos tramos tienen un punto en común



Definición
El. definitorios
Representación
Aproximaciones
Cadenas
Fijas / libres
Curvas libres

Una forma práctica de clasificar las condiciones de encadenamiento de las curvas es definir el “grado de continuidad”

Habitualmente se consideran cuatro niveles o grados crecientes de continuidad:

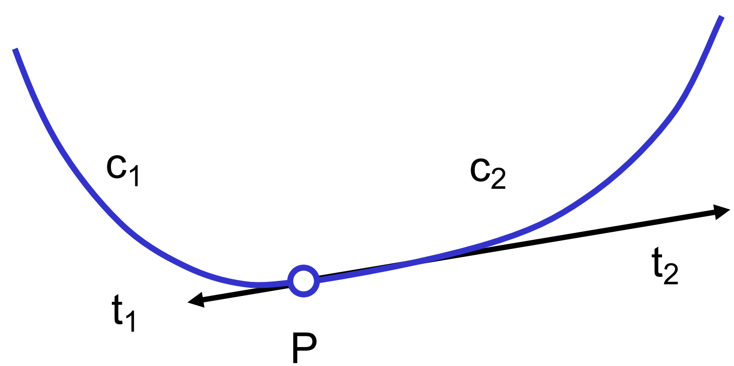
C^0 NULA

C^1 POSICIONAL

C^2 **TANGENCIAL**

C^3 DE CURVATURA

Hay continuidad posicional, y, además, la dirección de la tangente es la misma para el punto común, tanto si se le considera como último punto del primer tramo, como si se le considera primer punto del segundo tramo



Una forma práctica de clasificar las condiciones de encadenamiento de las curvas es definir el “grado de continuidad”

Habitualmente se consideran cuatro niveles o grados crecientes de continuidad:

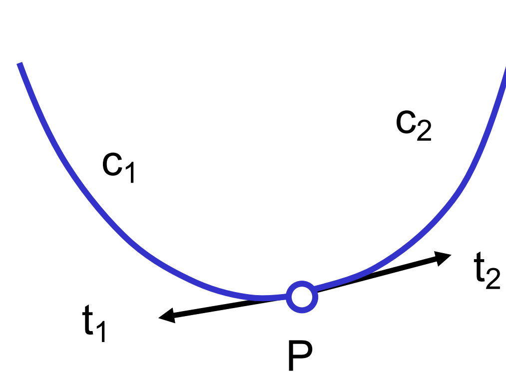
C^0 NULA

C^1 POSICIONAL

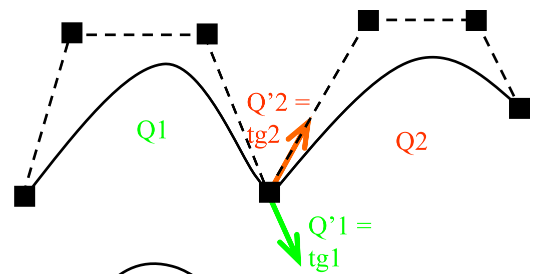
C^2 TANGENCIAL

C^3 **DE CURVATURA**

Hay continuidad tangencial, y, además el radio de curvatura es el mismo para el punto común, tanto si se le considera como último punto del primer tramo, como si se le considera primer punto del segundo tramo

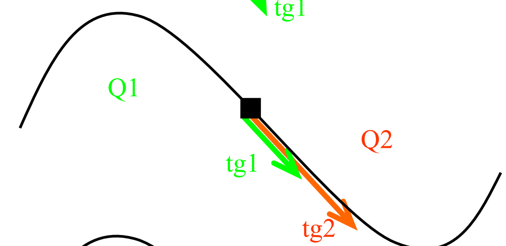


Existen otras clasificaciones más complejas, que distinguen entre continuidad geométrica y paramétrica:



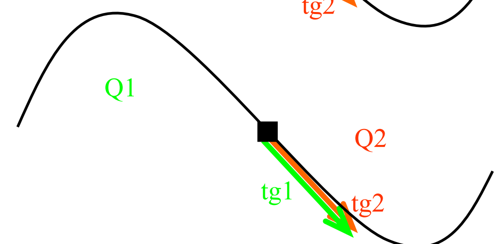
La curva tiene continuidad geométrica G1 cuando las derivadas primeras (tangentes) de ambos segmentos curvos en el punto de unión son proporcionales

G1
C0



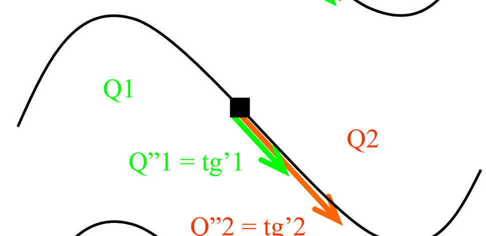
La curva tiene continuidad parámetrica C1 si además, los módulos de las tangentes coinciden (tangentes iguales)

G1
C1



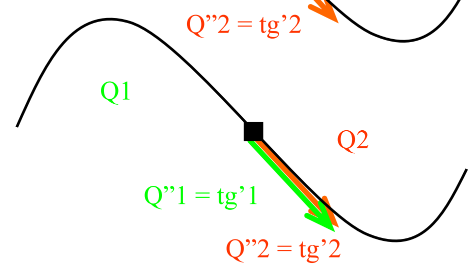
Si las derivadas segundas de ambos segmentos curvos en el punto de unión son proporcionales, la curva tiene continuidad geométrica G2

G2
C1



Si además, los módulos de las derivadas segundas coinciden (son iguales) la curva tiene continuidad parámetrica C2

G2
C2



Para una gestión básica de las condiciones de encadenamiento, se debe tener en cuenta que:

- √ La transición entre segmentos curvos será más suave cuando mayor sea el grado de continuidad
- √ La continuidad paramétrica es más restrictiva que la geométrica

Continuidad paramétrica de grado 2 implica continuidad geométrica de grado 2, pero no al contrario

Atendiendo a los requisitos de diseño, las curvas pueden ser:

Fijas o analíticas $\leftrightarrow$ Libres o sintéticas

Cada parámetro que las define se corresponde con algún requisito de diseño

¡No se puede cambiar ningún parámetro sin que la curva resultante deje de cumplir algún requisito!

Cumplen todos los requisitos de diseño, sin que éstos lleguen a determinar todos sus parámetros

¡Se pueden cambiar algunos parámetros sin que la curva resultante deje de cumplir ningún requisito!

Que una curva sea analítica o sintética
no depende de la naturaleza de la propia curva

Puesto que cualquier tipo de curva tiene un número fijo de parámetros que la definen, tenemos tres situaciones posibles:

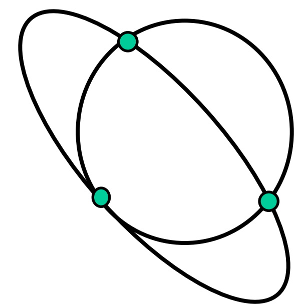
1 Se la considera libre cuando el número de los parámetros que la definen sea superior al número de requisitos de diseño

2 Se considera fija cuando el número de los parámetros que la definen coincide con el número de requisitos de diseño

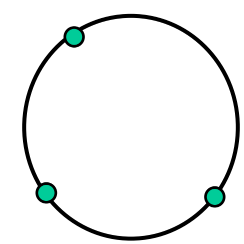
3 No será útil para aquellos problemas de diseño en los que el número de requisitos a cumplir supere al número de los parámetros que la definen

Por ejemplo:

1 Si deseamos una curva suave (sin cambios bruscos de curvatura), cerrada y que pase por tres puntos, podremos definir infinitas curvas que cumplan tal condición



2 Si deseamos una curva cerrada, con *curvatura constante* y que pase por tres puntos, tan sólo una circunferencia cumplirá las condiciones exigidas



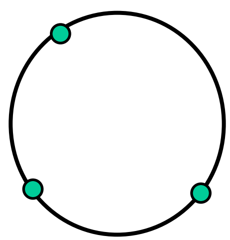
3 Si deseamos una curva cerrada, con *curvatura constante* y que pase por cuatro puntos, no existe una solución general

En otras palabras:

las curvas fijas son las que definen formas que quedan completamente determinadas por las condiciones funcionales

⇔

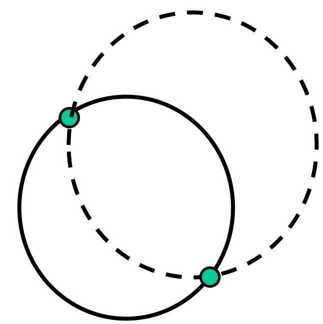
las curvas libres son las que tienen grados de libertad disponibles, después de imponer todos los requisitos geométricos



Curvatura constante

Cerrada

Pasa por V1 V2 y V3



Curvatura constante

Cerrada

Pasa por V1 y V2

Las curvas fijas son las que se han utilizado tradicionalmente en diseño industrial, porque:

√ Aportan geometrías con comportamiento contrastado

√ Se pueden replicar fácilmente con instrumentos de dibujo

✗ Limitan la creatividad de los diseñadores a un conjunto de formas básicas

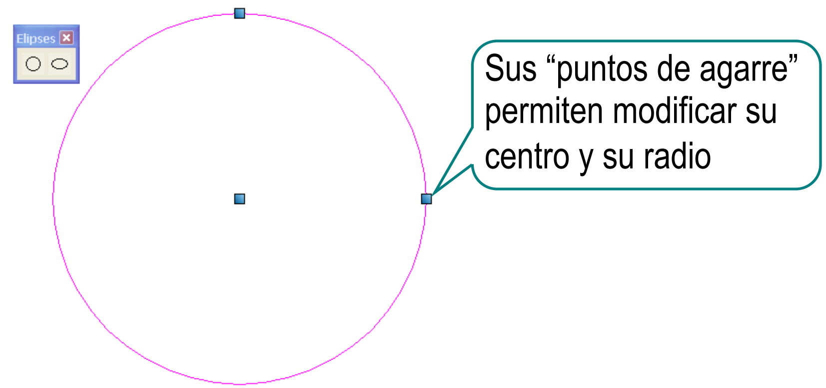
Para generalizar el uso de curvas libres, ha sido necesario disponer de ordenadores, porque:

√ Potencian la capacidad estética del diseñador, sin comprometer el comportamiento funcional del diseño

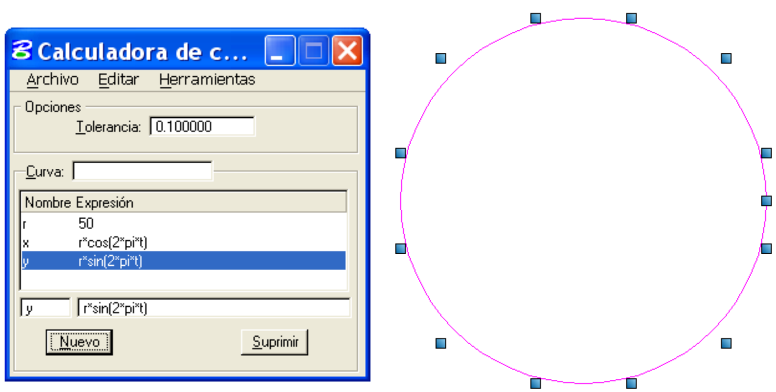
✗ Sólo se puede replicar su forma, si no se dispone de:

Plantillas ⟷ Métodos de cálculo matemático

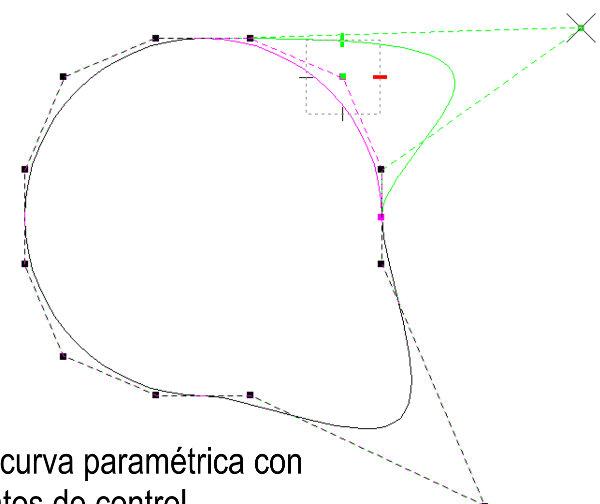
Una circunferencia sólo puede cambiar si se modifica su centro o su radio



Una curva libre que inicialmente replica una circunferencia, puede editarse hasta convertirse en una curva distinta



Circunferencia creada con la calculadora de curvas paramétricas de MStation

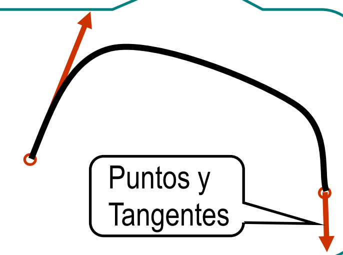


Es una curva paramétrica con sus puntos de control

La principal característica de las curvas libres o sintéticas es que el diseñador puede cambiar la forma:

- √ Sin modificar las características intrínsecas
- √ Manipulando directamente ciertos elementos de control

Los elementos de control básicos son:



Manipulando los elementos de control, se consiguen diferentes soluciones, todas ellas válidas desde el punto de vista funcional

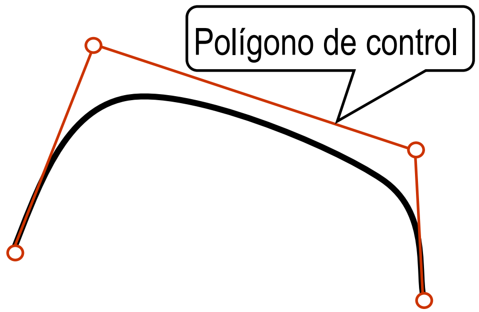
Por tanto, las curvas libres potencian la capacidad estética del diseñador, sin comprometer el comportamiento funcional del diseño

Las condiciones que cumplen las curvas sintéticas son:

1 Los elementos de control tienen que ser pocos e intuitivos

Un elemento de control muy utilizado es el polígono de control

El polígono de control se obtiene uniendo mediante segmentos de recta los sucesivos puntos que definen la curva



Sus principales ventajas son:

- √ Es un modo conveniente de manejar conjuntamente puntos y tangentes
- √ Ayuda al usuario a imaginar aproximadamente la forma de la curva

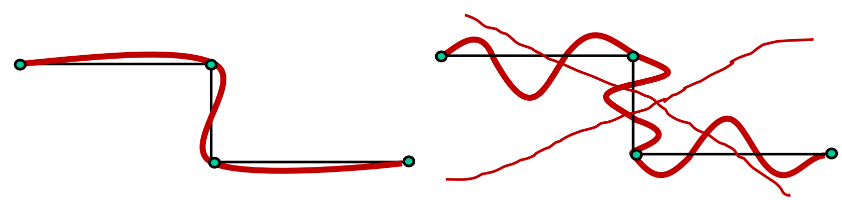
Las condiciones que cumplen las curvas sintéticas son:

1 Los elementos de control tienen que ser pocos e intuitivos

2 Definen una "buena forma"

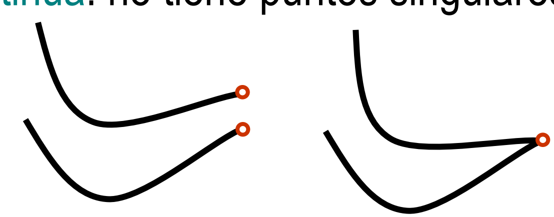
Se dice que una curva tiene una "buena forma" cuando:

√ Es suave: no tiene grandes oscilaciones



¡Las curvas muy onduladas no suelen tener utilidad práctica en el diseño de formas!

√ Es continua: no tiene puntos singulares



Las condiciones que cumplen las curvas sintéticas son:

1 Los elementos de control tienen que ser pocos e intuitivos

2 Definen una "buena forma"

3 Proporcionan una descripción matemática de la curva

- √ Para facilitar su implementación mediante programas de ordenador
- √ Para definirlas unívocamente
- √ Para facilitar el cálculo de puntos no conocidos

Las curvas paramétricas polinómicas básicas no son prácticas para diseño:

- ✗ No son intuitivas para el usuario

¡Los parámetros de los polinomios carecen de cualquier significado físico o geométrico!

- ✗ Tienen formulaciones matemáticas costosas e inestables para los cálculos numéricos

La solución consiste en:

- √ Reformular los polinomios para que los parámetros tengan significado geométrico
- √ Descomponer las curvas en cadenas de curvas simples

Es decir, se "trocean" y "encadenan" las curvas

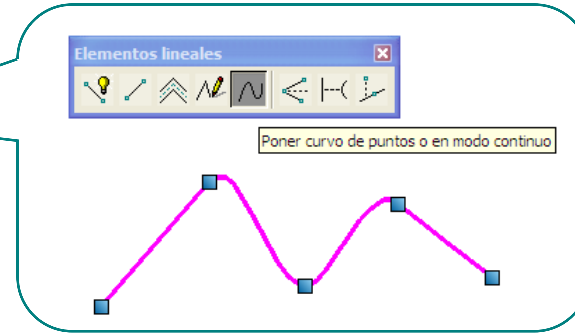
Los splines y NURBS son las curvas paramétricas más utilizadas

Más detalles sobre curvas paramétricas en 3.0.3

El uso de curvas interpoladas tipo SPLINE es simple e intuitivo:

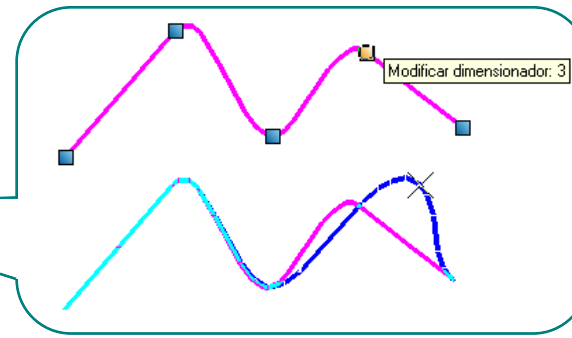
1 La creación se limita a:

- ✓ Definir los nodos
- ✓ Definir las tangentes en los extremos (opcional)



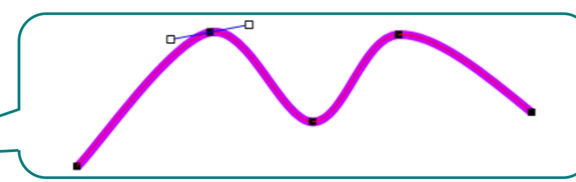
2 La edición se limita a:

- ✓ Mover los nodos

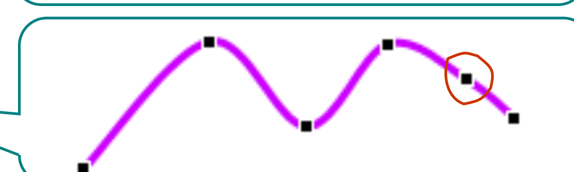


3 La edición más avanzada permite:

- ✓ Modificar las tangentes



- ✓ Añadir o quitar nodos



El uso de curvas ajustadas tipo NURBS es potente pero complejo:

1 La creación requiere definir:

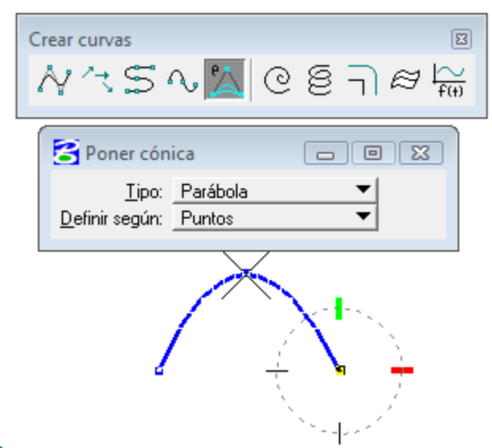
- ✓ Puntos de control
  Determinan el polígono de control, que controla aproximadamente la forma de la curva
- ✓ Nudos
  Controlar el encadenamiento de las curvas y el comportamiento de cada tramo
- ✓ Pesos
  Controlan la distancia entre la curva y los puntos de control
  Ajustando los pesos se pueden conseguir desde líneas poligonales hasta curvas muy suaves

2 La edición permite modificar separadamente todos los parámetros

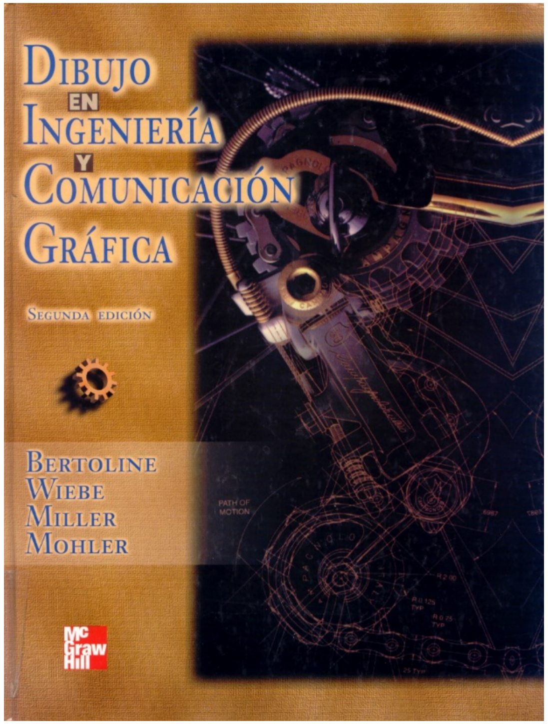
3 La edición más avanzada permite:

- ✓ Aplicar transformaciones
- ✓ Tratar con tipos particulares de curvas

Como generar arcos de cónicas como un tipo particular de NURBS



Para repasar

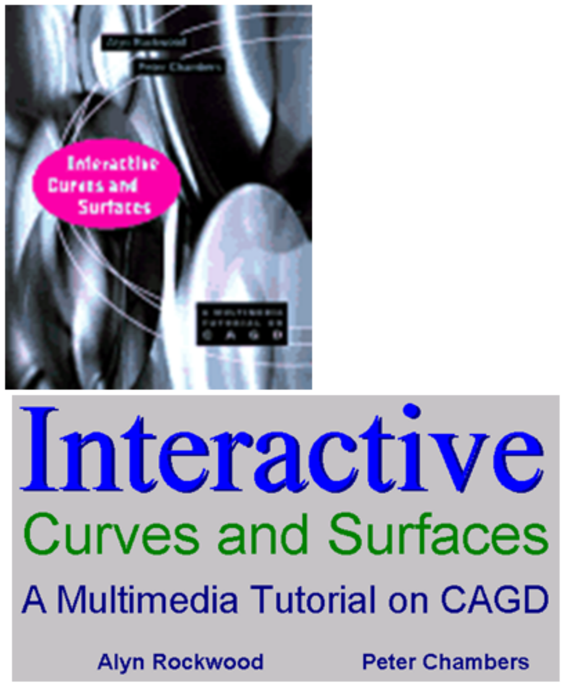


Capítulo 1: Teoría general de curvas

Capítulo 6: Geometría en ingeniería y construcción

¡Cualquier buen libro de CADG!

El CADG (Diseño Geométrico Asistido por Computador) se dedica al estudio y definición de métodos para la generación de curvas complejas.



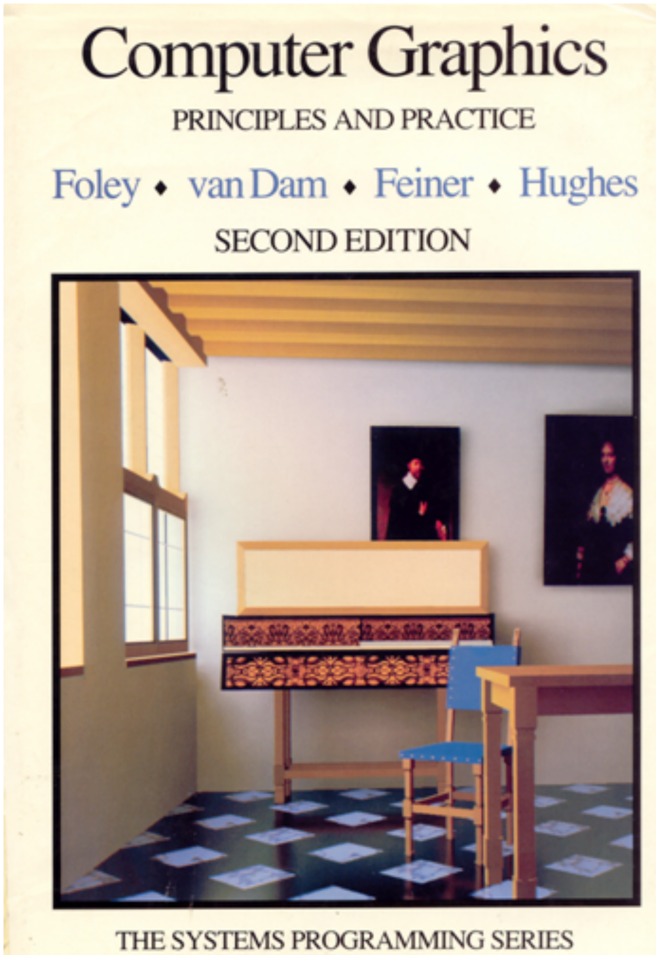
Se recomienda especialmente el "tutorial" interactivo

Capítulo 2: Curvas del plano

Capítulo 4: Curvas y superficies del espacio

Para repasar

Capítulo 11: Representing curves and surfaces



Capítulo 9: Representación de curvas y superficies