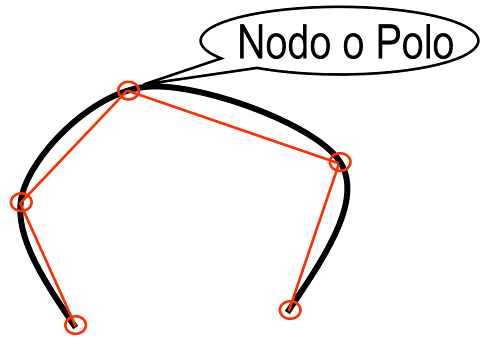
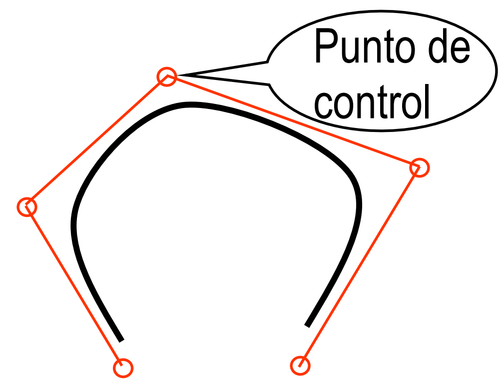
3.0.3
Curvas Paramétricas Polinómicas

Atendiendo al modo de conectar la curva y los puntos que la definen hay tres tipos de curvas:

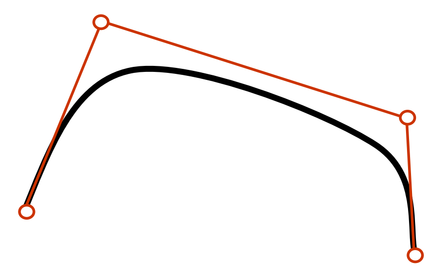
- En las curvas interpoladas los puntos pertenecen a la curva (son "puntos de paso", nodos o polos de la curva)



- En las curvas ajustadas los puntos no pertenecen a la curva (son puntos de control)



- También hay soluciones mixtas, que interpolan algunos puntos y ajustan otros



Las curvas interpoladas más comunes
se pueden organizar por orden cronológico:

1 **Curvas de Lagrange**

2 **Curvas de Hermite**

3 **Curvas Spline**

Las curvas Spline son las únicas
que siguen teniendo interés práctico

1

La formulación de Lagrange consiste en definir un sistema de 2n ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 + \dots \\
y_1 &= a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 + \dots \\
x_1 &= a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 + \dots \\
y_2 &= a_4 + b_4 t + c_4 t^2 + d_4 t^3 + \dots \\
&\dots \\
y_n &= a_{2n} + b_{2n} t + c_{2n} t^2 + d_{2n} t^3 + \dots
\end{aligned}
$$

El sistema se puede resolver introduciendo las coordenadas de los n puntos a interpolar

Sus principales ventajas son:

1 La interpolación de Lagrange es simple y única

2 Tiene una clara interpretación geométrica: la curva siempre pasará por los puntos

Sus principales inconvenientes son:

1 El orden de los polinomios debe ser el doble que el número de vértices: al aumentar los vértices los tiempos de cálculo se tornan rápidamente inaceptables

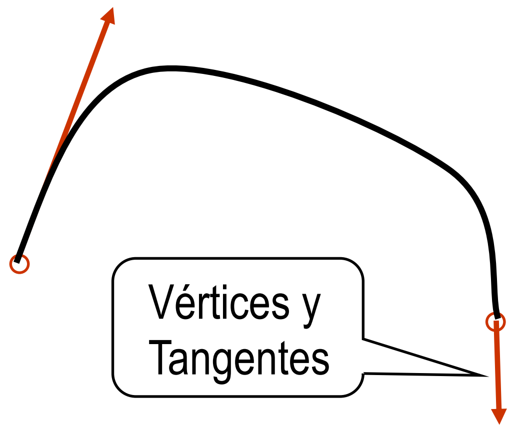
Normalmente deja de ser práctica para grados mayores o iguales que cinco

2 Para polinomios de orden elevado la curva presenta oscilaciones

3 No permiten un control local de la curva

4 No permiten un control intuitivo de la curva, porque los coeficientes carecen de cualquier significado físico o geométrico

2 Las curvas de Hermite interpolan los puntos extremos y sus tangentes



Sus principales ventajas son:

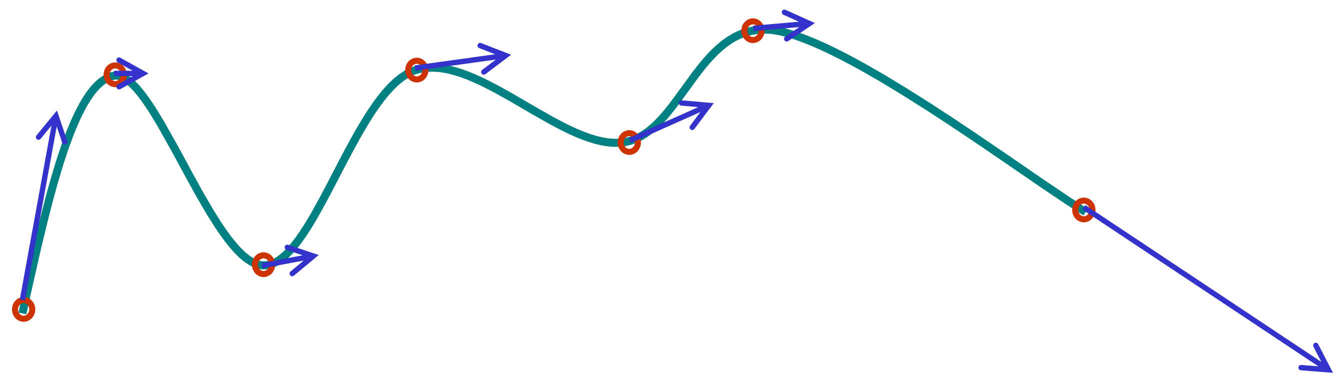
1. El control de la curva es muy intuitivo y simple

Sus principales inconvenientes son:

1. No son invariantes a las transformaciones afines
2. Su forma es excesivamente simple, y no sirve para casos más complejos
3. No proporcionan control local al diseñador

3

Las curvas Spline se obtienen encadenando curvas Hermite y exigiendo igualdad de las tangentes



Los "nudos" no coinciden con los nodos dados por el usuario

Los nudos y las tangentes los determina la aplicación, y no son visibles para el usuario

Sus principales **ventajas** son:

1. Se obtienen curvas suaves, incluso con muchos vértices
2. Presentan una mayor estabilidad numérica que la representación polinómica tradicional
3. Las splines cúbicas (las más utilizadas), tienen una gran flexibilidad
4. Suelen asegurar la continuidad de segundo orden
5. No se exige al usuario definir las pendientes en los puntos interpolados (salvo en sus extremos)

También tienen algunos **inconvenientes**:

1. No garantizan las mismas condiciones de continuidad en todos los puntos
2. En splines cúbicas, las discontinuidades en la derivada tercera pueden producir oscilaciones
3. El desplazamiento de cualquier punto de control obliga a recalcular la curva entera
4. Es necesario especificar a priori los puntos de la curva por donde pasa
5. No es posible un control local de la curva

Las curvas ajustadas más comunes
se pueden organizar por orden cronológico:

1 **Curvas de Bezier**

¡Son un hito histórico!

Fueron desarrolladas en paralelo por Bezier (en Renault) y por Casteljau (en Citröen)

2 **Curvas B-Spline**

Son las más implantadas en las aplicaciones CAD comerciales

¡las denominaciones suelen ser confusas!

3 **Curvas NURBS**

Son las más generales

¡Las anteriores son casos particulares!

1

Las curvas de Bezier habitualmente se describen como suma de polinomios ponderados:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t) \qquad 0 \le t \le 1$$

La formulación tiene significado geométrico porque los puntos de control son los coeficientes de ponderación

$$J_{n,i} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

(Los "J" son polinomios de base, "de mezcla" o de Bernstein)

¡La consecuencia es que el orden coincide con el número de puntos de control!

Algunos casos particulares son:

√ Grado 1 (recta) $\Rightarrow$ P= (P_0 , P_1)

$B_1(t)= P_0 + (P_1-P_0)*t \qquad t \in [0,1]$

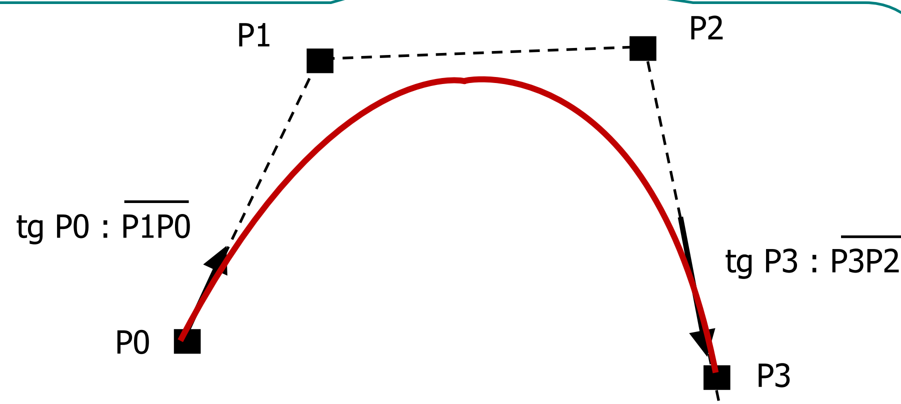
√ Grado 2 (cuádrica) $\Rightarrow$ P= (P_0 , P_1 , P_2)

$B_2(t)= (1-t)^2\, P_0 + 2t(1-t)\, P_1 + t^2\, P_2$

√ Grado 3 (cúbica) $\Rightarrow$ P= (P_0 , P_1 , P_3 , P_4)

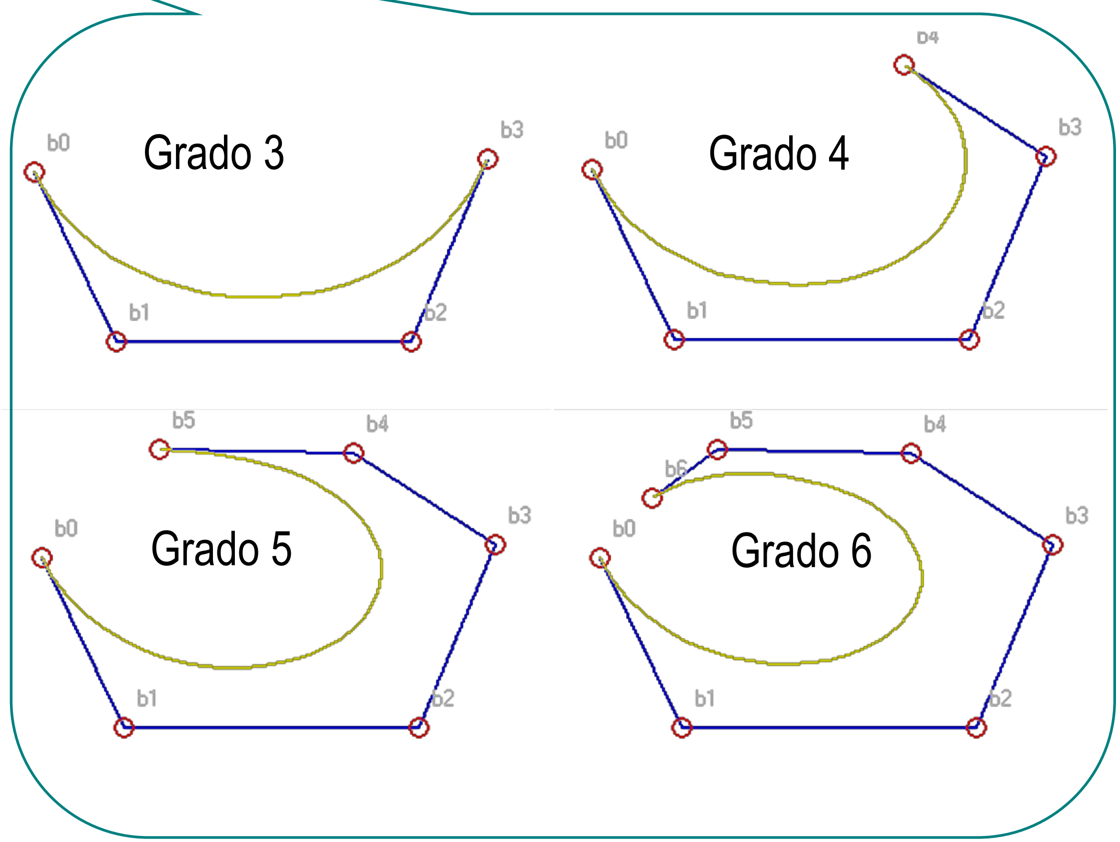
$B_3(t)= (1-t)^3\, P_0 + 3t(1-t)^2\, P_1 + 3t^2(1-t)\, P_2 + t^3\, P3_2$

El primer y el último punto
interpolan la curva,
y el segundo y el tercero
ajustan las tangentes



Sus principales ventajas son:

1. Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado



Sus principales ventajas son:

1. Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado

2. "Mimetizan" al polígono de control

La estrategia para modelar una curva con una curva de Bezier es:

- √ Definir un polígono de control que "exagera" la forma de la curva deseada
- √ "Retocar vértices" (modificando intuitivamente su posición)

El proceso es rápido e intuitivo: en pocas iteraciones se obtiene el perfil buscado

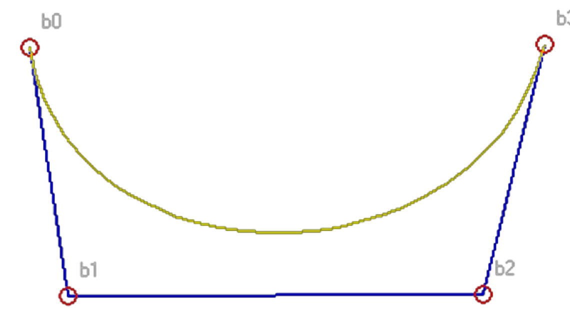
Sus principales ventajas son:

1 Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado

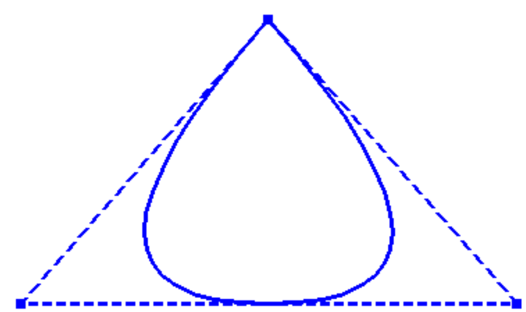
2 "Mimetizan" al polígono de control

3 Interpolan los puntos extremos

Esto facilita el control directo de esos puntos, que suelen tener mucha importancia en el diseño de formas



Por ejemplo, sirve para definir curvas cerradas



Sus principales ventajas son:

1 Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado

2 "Mimetizan" al polígono de control

3 Interpolan los puntos extremos

4 Tienen carácter no oscilante o amortiguado ("disminuyen las variaciones")

Esta propiedad tiene varias consecuencias prácticas:

√ "precisión lineal", que significa que, si todos los puntos de control están alineados, la curva de Bezier degenera en una recta (que contiene a esos puntos)

√ Al ir aumentando el grado, los sucesivos polígonos de control convergen hacia la curva

Sus principales ventajas son:

1. Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado

2. "Mimetizan" al polígono de control

3. Interpolan los puntos extremos

4. Tienen carácter no oscilante o amortiguado ("disminuyen las variaciones")

5. Son invariantes ante las transformaciones afines

¡La transformada afín de una curva coincide con la curva definida por la transformada afín del polígono de control!

Esta propiedad es importante para los programadores, porque permite simplificar mucho el cálculo de las transformaciones

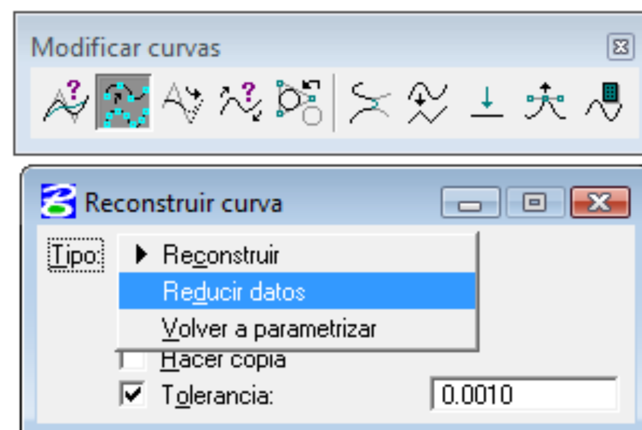
Pero también es importante para el diseñador, porque asegura que la forma elegida no será alterada por esas transformaciones (tales como los escalados, las rotaciones, etc.)

Sus principales ventajas son:

1. Mantiene la tendencia a dar curvas suaves aunque aumente su grado
2. “Mimetizan” al polígono de control
3. Interpolan los puntos extremos
4. Tienen carácter no oscilante o amortiguado (“disminuyen las variaciones”)
5. Son invariantes ante las transformaciones afines
6. Permiten variar el grado

La elevación del grado introduce parámetros redundantes, porque se utilizan más parámetros para definir la curva, pero aporta flexibilidad para modificar el diseño

La reducción del grado no genera exactamente la misma curva; pero casi siempre es posible encontrar una reducción aproximada suficientemente precisa



Sus principales inconvenientes son:

1 Tienen comportamiento global

No es posible efectuar modificaciones locales en la forma: desplazando un solo vértice se modifica la forma de toda la curva

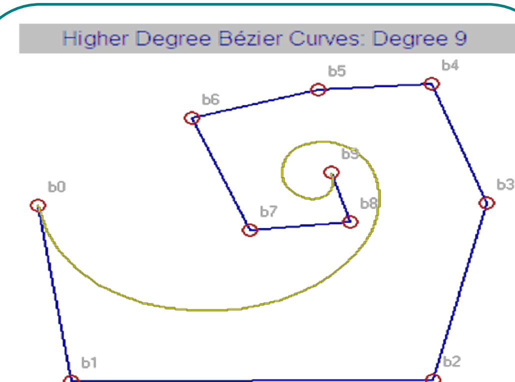
En realidad, los efectos de los cambios se amortiguan rápidamente, por lo que generalmente se considera que el comportamiento es "casi" local: se asume que el cambio de un vértice afecta de forma perceptible sólo a la zona de la curva vecina a dicho vértice

2 Se necesitan construcciones geométricas bastante tediosas para garantizar la continuidad en los empalmes de dos o más curvas de Bezier

La continuidad puede ser de orden 0 sin más que imponer la condición de que el punto final de la primera curva coincida con el inicial de la segunda

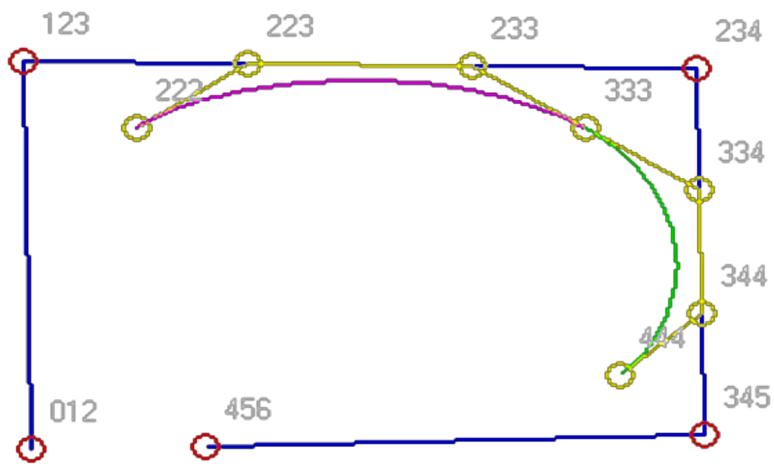
Para garantizar continuidad de orden 1, se deben alinear los tramos de los polígonos descriptores situados a uno y otro lado del polo común (el segmento formado por el penúltimo y último punto de la primera curva con el segmento formado por el primer y segundo punto de la segunda)

3 Se necesita elevar mucho el grado para obtener curvas con curvaturas cambiantes



2

Las curvas B-Spline son cadenas de curvas de Bezier



- El usuario define y manipula el polígono global
- Cada tramo curvo tiene su propio polígono de control (interno)
- Los nodos de enlace son los nudos

Sus principales ventajas son:

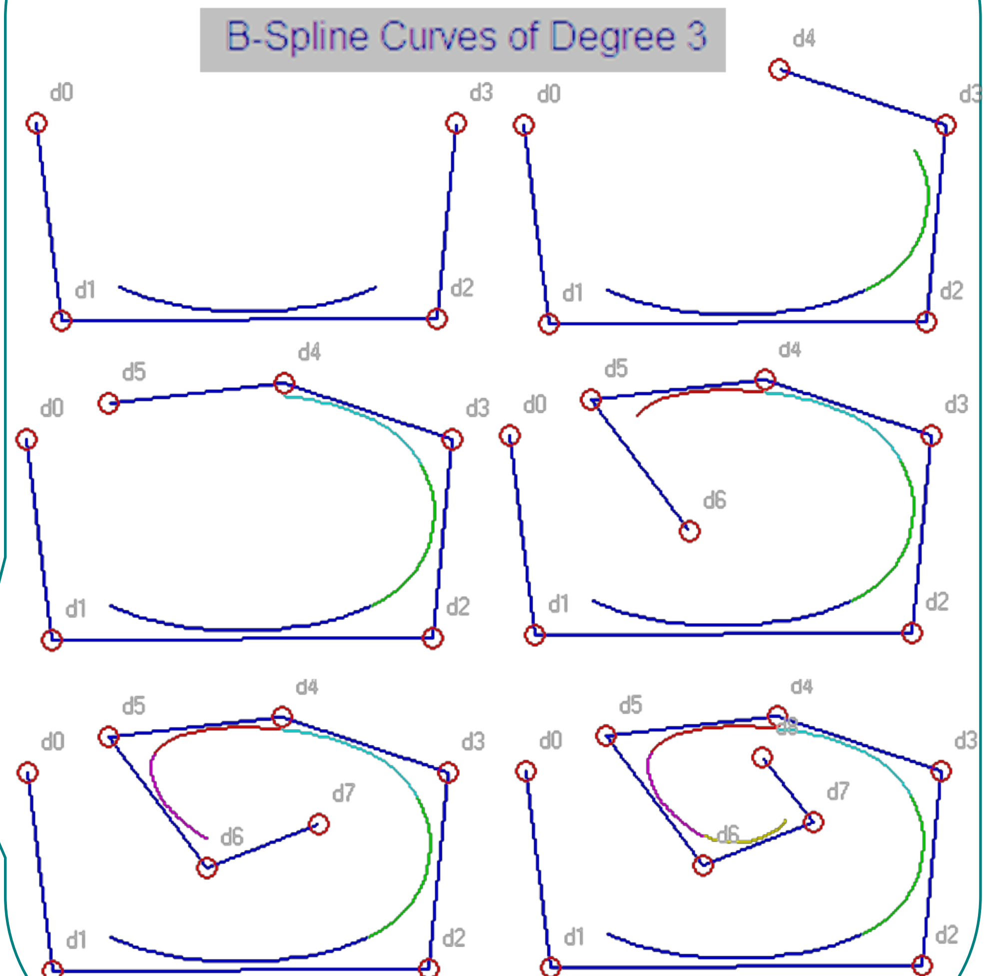
1. Mantienen las ventajas de las curvas de Bezier

2. El número de puntos de control es independientemente del grado de la curva

3. Admite puntos de control múltiples

4. Modela con facilidad regiones de elevada curvatura

Se controla la curvatura añadiendo puntos de control, sin aumentar el grado :



Sus principales ventajas son:

1 Mantienen las ventajas de las curvas de Bezier

2 El número de puntos de control es independientemente del grado de la curva

3 Admite puntos de control múltiples

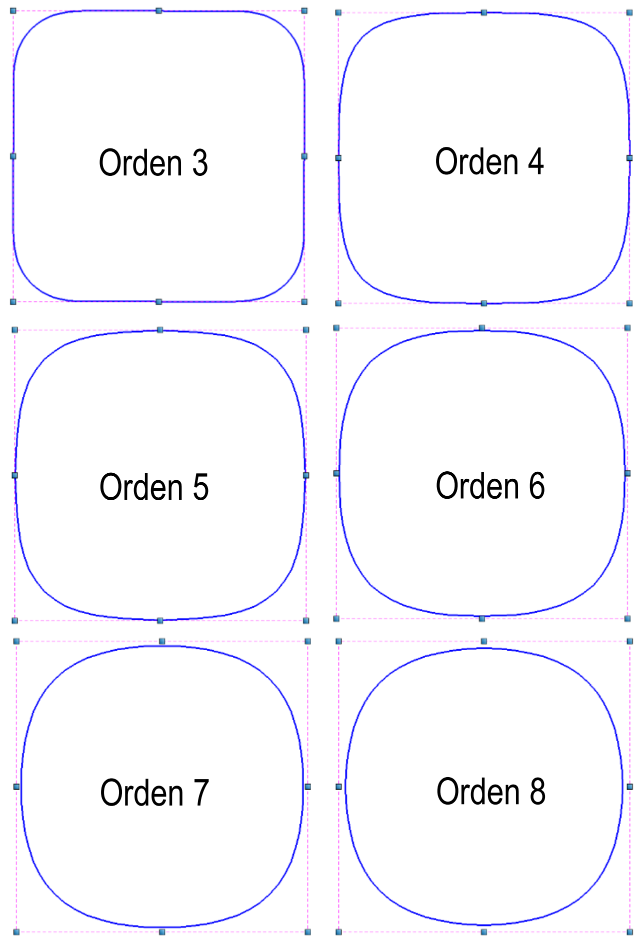
4 Modela con facilidad regiones de elevada curvatura

Sus principales inconvenientes son:

1 El control de la curva mediante puntos múltiples es complejo

2 No permiten modelar curvas racionales

Con curvas B-Splines no se pueden modelar curvas cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola)



Hay muchas variantes de curvas B-spline:

- √ β-Spline
  - √ Permiten controlar la inclinación y tensión de la curva

    Se consiguen formas más complejas, porque la curva se puede acercar o separar al polígono de control

  - ✗ Su formulación es exponencial, y por tanto su cálculo es computacionalmente costoso

- √ B-Spline no uniforme

  El usuario puede modificar los nudos

  - √ Distribuyendo uniformemente los nudos tenemos la B-spline básica
  - √ Distribuyendo los nudos de manera no uniforme, aparecen curvas cuyo comportamiento puede variar localmente de unos tramos a otros
  - ✗ Es un caso particular de las NURBS

3

Las curvas NURBS son B-splines con dos características añadidas:

Acrónimo de "Non Uniform Rational B-spline"

Son "no uniformes" porque los nudos no están uniformemente distribuidos

Se pueden modificar los nudos para controlar localmente el comportamiento de cada tramo

Son "racionales" porque se obtienen como cocientes de polinomios

Matemáticamente su formulación es:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) w_i}$$

Las principales ventajas de las curvas NURBS son:

1 Representan todo tipo de curvas con una única formulación

√ Pueden representar líneas rectas, curvas cónicas, B-Splines, etc.

¡Tienen todas las ventajas de las curvas anteriores!

√ Pueden representar otras curvas no representables con anterioridad

2 Las curvas racionales son invariantes a la rotación, escalado, traslación y a las transformaciones de perspectiva

Las no racionales son invariantes sólo a la rotación, escalado y traslación

¡Para transformar la curva basta aplicar la transformación a los puntos de control!

3 Son compactas: pueden representar formas muy complejas con muy pocos datos

4 El usuario tiene mucho control sobre la forma de la curva

El usuario puede controlar:

√ Puntos de control

√ Nudos

√ Pesos

Los principales inconvenientes de las curvas NURBS son:

1 Necesitan mucha memoria para almacenar las curvas sencillas

¡Se necesitan siete puntos de control para definir una circunferencia!

2 Se necesita experiencia para controlar toda la variedad de parámetros de control

¡No es fácil intuir como afecta a la curva un cambio de posición de los nudos!

¡No es fácil intuir como afecta a la curva un cambio combinado de nudos y pesos!

Las curvas interpoladas son convenientes para formas sencillas donde se necesite poco control de la curva

⟺

Las curvas ajustadas son convenientes para formas complejas donde se necesite mucho control de la curva

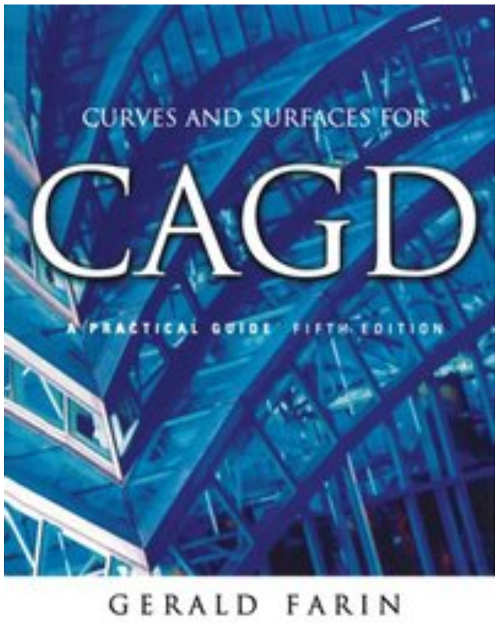
Las curvas SPLINE son la mejor opción

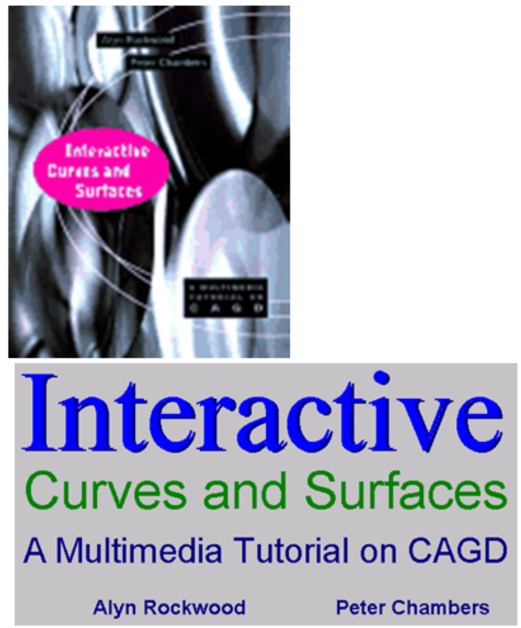
Las curvas NURBS son la mejor opción

Para repasar

¡Cualquier buen libro de CADG!

El CADG (Diseño Geométrico Asistido por Computador) se dedica al estudio y definición de métodos para la generación de curvas complejas.





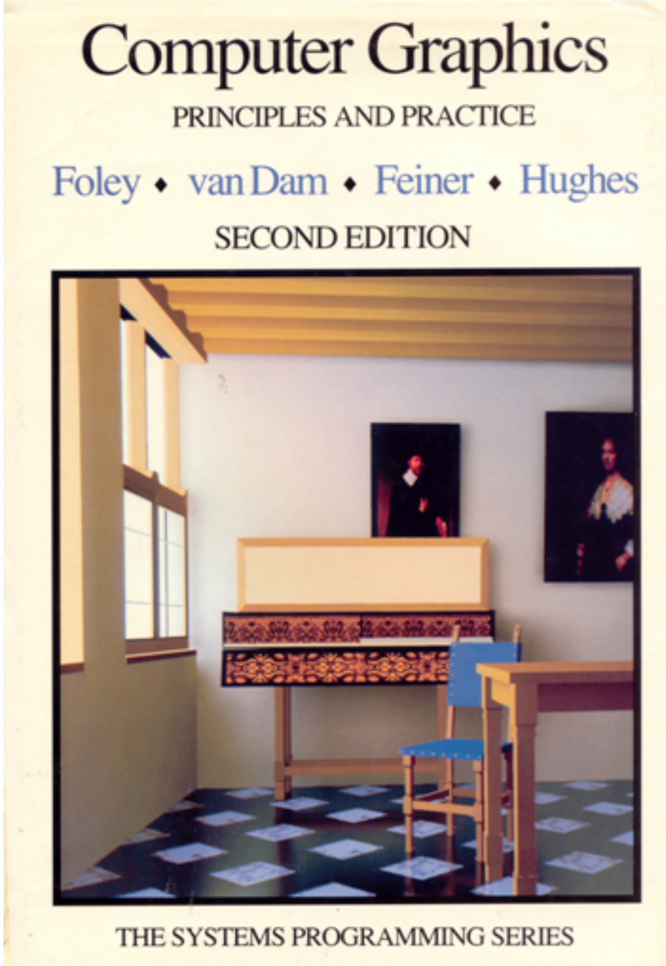
Se recomienda especialmente el "tutorial" interactivo

Capítulo 2: Curvas del plano

Capítulo 4: Curvas y superficies del espacio

Para repasar

Capítulo 11: Representing curves and surfaces



Capítulo 9: Representación de curvas y superficies