

1.0

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS DEL MODELADO

Introducción

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

El **dibujo geométrico** utiliza técnicas de *representación geométrica* (o *trazado*) para producir figuras geométricas sobre las que se pueda razonar, o construir formas geométricas más complejas

Primero estudiaremos cuatro aspectos de las figuras geométricas:

- 1 Los **elementos geométricos** son aquellos conceptos primarios que no podemos definir, porque no los podemos referir a otros más sencillos
- 2 Los elementos geométricos se organizan mediante **relaciones**
- 3 Las **figuras geométricas** están formadas por elementos geométricos relacionados
- 4 Las figuras geométricas se **transforman** para formar nuevas figuras

Luego consideraremos los métodos de **trazado**, y las diferencias asociadas con el uso de diferentes **instrumentos**

Terminaremos con una breve referencia a la metodología de **lugares geométricos**

Elementos geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

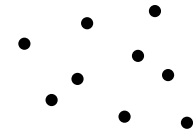
Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Los **elementos geométricos** son aquellos conceptos primarios cuya existencia reconocemos de forma axiomática:

- ✓ Se acepta la existencia de infinitos entes llamados **puntos**, cuyo conjunto llamamos espacio

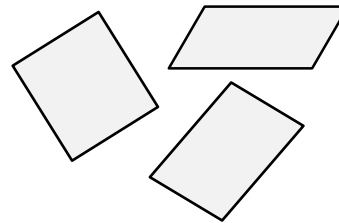


- ✓ Hay dos grupos de puntos que dan lugar a conceptos primarios que tampoco se definen:

✓ **Rectas**

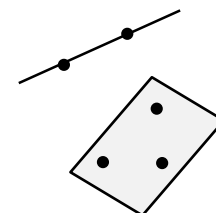


✓ **Planos**



Aceptamos como axiomas ciertos **enlaces** entre los elementos, que son intuitivos y que nos ayudan a delimitar dichos conceptos:

- ✓ Por dos puntos distintos pasa una recta y solo una
- ✓ Tres puntos no alineados definen un plano



Elementos geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

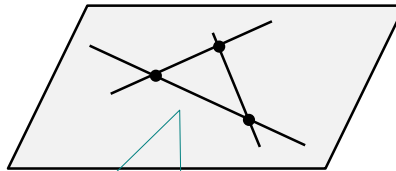
Lugares geom.



Como consecuencia de ciertos axiomas...

- ✓ Si dos puntos de una recta están contenidos en un plano, todos los demás puntos de la recta están también contenidos en el plano
- ✓ Una figura es plana si todos sus puntos están contenidos en el mismo plano

...se puede definir la **geometría plana** como la parte de la geometría que estudia las propiedades y representación de las figuras planas



Puesto que no tiene sentido definir planos dentro de un plano, los elementos de las figuras planas quedan limitados a **puntos** y **rectas**

Elementos geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

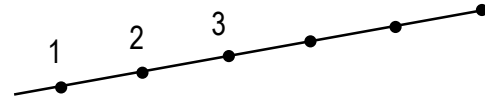
Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

También aceptamos un **axioma de ordenación** de la recta:

- ✓ Todos los puntos de una recta se dice que están alineados y ordenados



El **orden** determina cómo se relacionan tres puntos distintos pertenecientes a una misma recta:

- ✓ Un conjunto de puntos está **ordenado linealmente** cuando es posible relacionarlos entre sí mediante “preceder” o “seguir”
- ✓ Dados dos puntos distintos A y B de una recta, solo puede ocurrir que A **precede** a B o, por el contrario, B precede a A
- ✓ La precedencia cumple la **propiedad transitiva** (si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C)
- ✓ De la misma forma, dados dos puntos distintos A y B de una recta, solo puede ocurrir que A **sigue** a B o, por el contrario, B sigue a A
- ✓ Cuando un punto B de una recta precede a un punto C y sigue a A, se dice que **está entre** A y C

Elementos geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

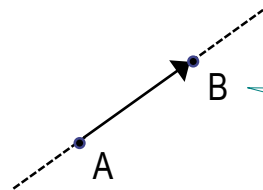
Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

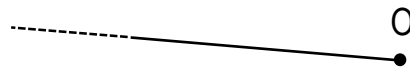
Al considerar la ordenación, aparecen elementos derivados de la recta:

- ✓ Una **recta orientada** es una sucesión de puntos alineados



Para dar **sentido** a una recta basta dar el orden de dos de sus puntos (A precede a B, o A sigue a B)

- ✓ Una **semirrecta** es el conjunto formado por un punto de una recta y todos los que le preceden o le siguen



Su "origen"

Una semirrecta es una de las dos partes en las que una recta queda dividida por un punto de la misma

- ✓ Un **segmento de recta** es una porción de una recta comprendida entre dos puntos de la misma



Separados por una distancia finita

- ✓ Los puntos que delimitan el segmento se denominan vértices o extremos
- ✓ Un segmento con sentido se denomina vector

Elementos geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

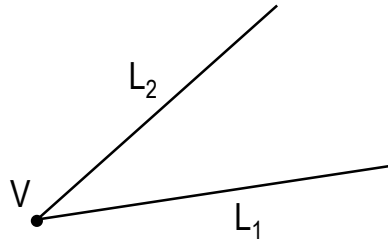
Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Un **ángulo** es la porción del plano delimitado por dos semirrectas que comparten sus respectivos orígenes



Al origen común se le denomina **vértice**, y a las semirrectas **lados** del ángulo

Algunas definiciones vinculadas a los ángulos son:

- ✓ El ángulo es **nulo** si las dos semirrectas coinciden

Forman parte de la misma recta y tienen el mismo sentido
- ✓ El ángulo es **llano** si las dos semirrectas son opuestas

Forman parte de la misma recta y tienen sentidos contrarios
- ✓ Un ángulo no-nulo y no-llano divide al plano en dos regiones de tal manera que en una y solo una de las regiones es **convexa**

Una región es convexa si el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de ella está contenido en ella
- ✓ La región convexa se llama **interior** del ángulo y la otra región se llama **exterior** del ángulo

Relaciones: asociativas y métricas

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Las *relaciones* son **vínculos** entre elementos geométricos

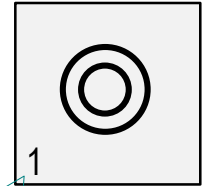
O "restricciones"

Se distinguen dos tipos principales de relaciones

- ✓ **Asociativas** (o *geométricas*), fijan una característica geométrica que vincula diferentes elementos

- ✓ No tienen una representación normalizada
- ✓ Se suelen representar mediante un símbolo ilustrativo encerrado en un cuadrado

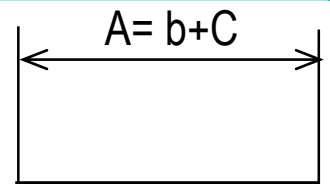
Se repite el símbolo junto a cada elemento relacionado



Se pueden numerar, para evitar confusiones

- ✓ **Métricas** (o *dimensionales*), fijan una medida o un parámetro de un elemento

- ✓ Se representan mediante cotas
- ✓ Se distingue entre **numéricas** y **algebraicas**, porque en las segundas la cifra de cota se reemplaza por un parámetro o una fórmula



Relaciones: asociativas y métricas



Se distinguen diferentes subtipos de **relaciones asociativas**:

- ✓ **Pertenencia** Una figura pertenece a otra figura si todos los puntos de la primera son también puntos de la segunda
- ✓ **Incidencia** Una figura incide en otra figura si algunos puntos de la primera son también puntos de la segunda
 - Los puntos comunes forman la **intersección**
- ✓ **Ordenación** Incluyen la organización del dibujo y los **patrones**

Las **relaciones métricas** entre elementos permiten determinar:

- ✓ **Tamaño** Determina lo pequeño o grande que es un elemento
- ✓ **Distancia** Determina lo cerca o lejos que están dos elementos
- ✓ **Posición** Determina la ubicación de un elemento respecto a otro que se toma como **referencia**
- ✓ **Orientación** Determina la inclinación de un elemento respecto a otro que se toma como **referencia**

Relaciones (alcance): intrínsecas y extrínsecas

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

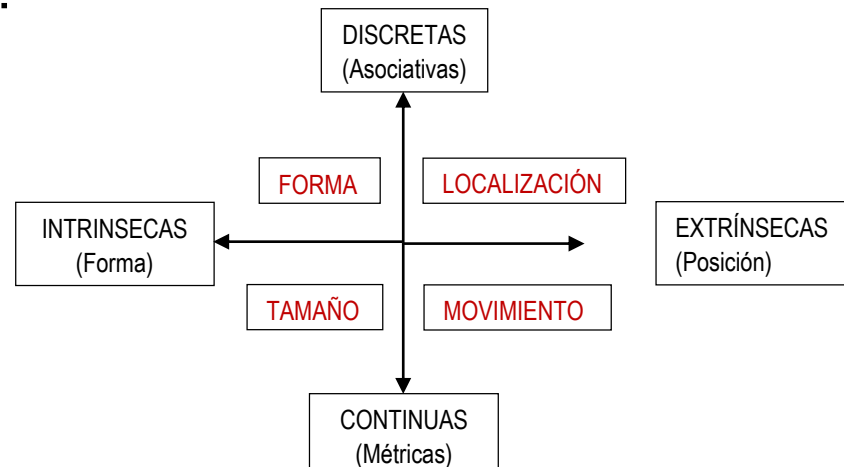
Lugares geom.

Atendiendo al alcance de la relación, podemos distinguir los tipos de elementos que relacionan:

- ✓ **Intrínsecas**, cuando relacionan diferentes elementos de una figura
- ✓ **Extrínsecas**, cuando relacionan elementos de una figura con su **entorno**

Representado habitualmente mediante un **Sistema de referencia**

El resultado es que se pueden distinguir cuatro grandes tipos de relaciones:

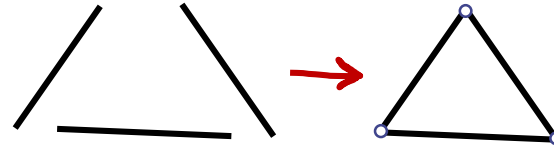


Más detalles sobre relaciones geométricas en 1.0.1

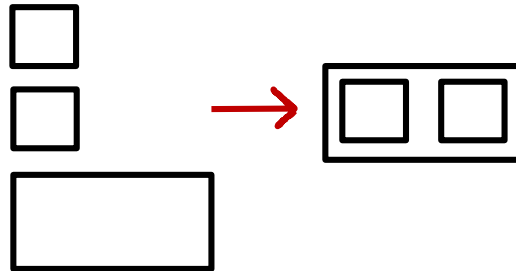
Figuras geométricas

Las figuras geométricas son conjuntos no vacíos de elementos geométricos vinculados mediante relaciones

Relacionando elementos se pueden obtener **figuras**



El proceso es recursivo, porque relacionando figuras se pueden obtener figuras más complejas



Más detalles sobre figuras elementales en 1.0.2

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

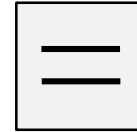
Lugares geom.

Figuras geométricas

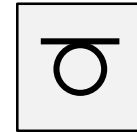
También se pueden definir relaciones entre *figuras* geométricas:

✓ Dos figuras pueden ser **iguales** en forma y/o tamaño

Se debe definir con precisión el alcance de toda restricción de **congruencia**

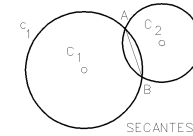
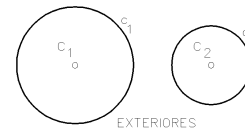


✓ Otra restricción común son las **tangencias**

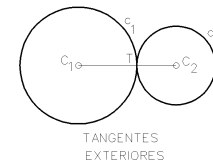
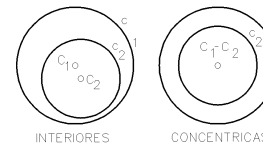


Hay tres tipos de relaciones entre curvas:

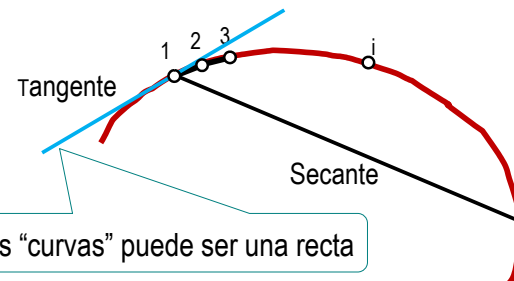
✓ Curvas exteriores son las que no tienen ningún punto en común



✓ Curvas secantes son aquellas que tienen dos o más puntos en común



✓ Curvas tangentes son el límite al que tienden las secantes cuando los dos nodos están infinitamente próximos



En particular, una de las dos “curvas” puede ser una recta

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Figuras geométricas

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

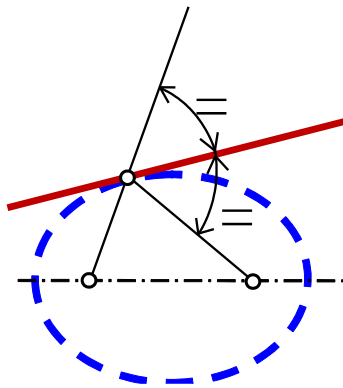
Transformaciones

Trazado

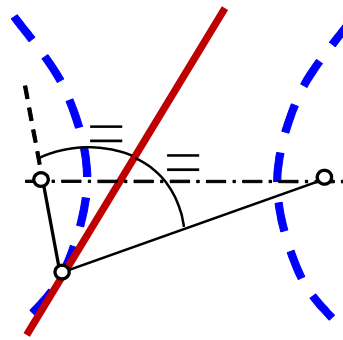
Lugares geom.

Hay diferentes casos de tangencia que tiene solución exacta mediante delineación con instrumentos tradicionales...

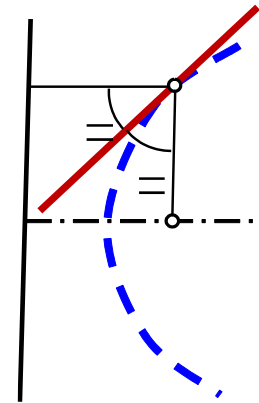
...aunque puede requerir conocimientos avanzados y construcciones geométricas



La tangente en un punto P a la elipse es bisectriz del ángulo que forman un radio vector y la prolongación del otro



La tangente en un punto P a la hipérbola es bisectriz del ángulo que forman los dos radios vectores



La tangente en un punto P a la parábola es bisectriz del ángulo que forman el radio vector y la perpendicular por P a la directriz (paralela al eje)

Transformaciones: geométricas

Introducción

Elementos

Relaciones

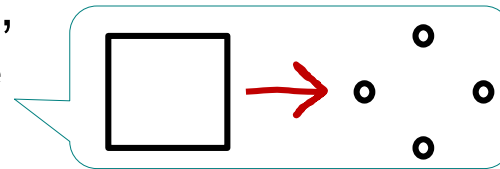
Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

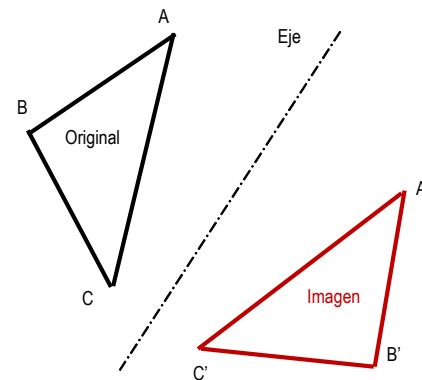
Una **transformación geométrica**, es una aplicación que convierte una figura en otra



La transformación es **homográfica** si hace corresponder a cada elemento de una especie, otro elemento de la misma especie

A cada punto del plano (o el espacio) le hace corresponder otro punto del plano (o el espacio)

La figura transformada se dice homóloga



Muchas transformaciones están automatizadas en las aplicaciones CAD, y se usan para edición de figuras geométricas



Más detalles sobre transformaciones en 1.0.3

Transformaciones: de proyección

La transformación de **proyección** convierte una figura 3D en una figura 2D

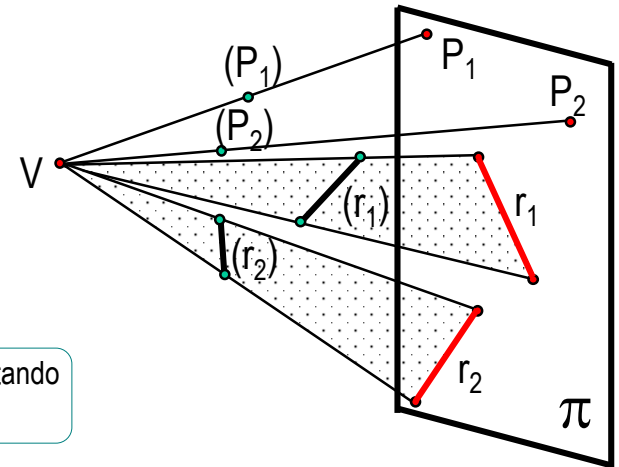
√ La PROYECCIÓN consta de dos pasos:

√ PROYECCIÓN

Se traza un haz de rectas que une cada punto de la figura original con el *centro de proyección*

√ SECCIÓN

Se obtienen los puntos de la figura imagen intersectando el haz de rectas por un *plano de proyección*



√ La aplicación sucesiva de estas dos operaciones a una figura “original” en 3D da como resultado una figura “imagen” en 2D

$$(\phi) \rightarrow \phi \begin{cases} (\phi) = \{\text{puntos } (P_1), (P_2), \dots, (P_n), \text{ rectas } (r_1), (r_2), \dots, (r_m)\} \\ \phi = \{\text{puntos } P_1, P_2, \dots, P_n, \text{ rectas } r_1, r_2, \dots, r_m\} \end{cases}$$



Más detalles sobre proyecciones en 1.0.4

Transformaciones: de proyección

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

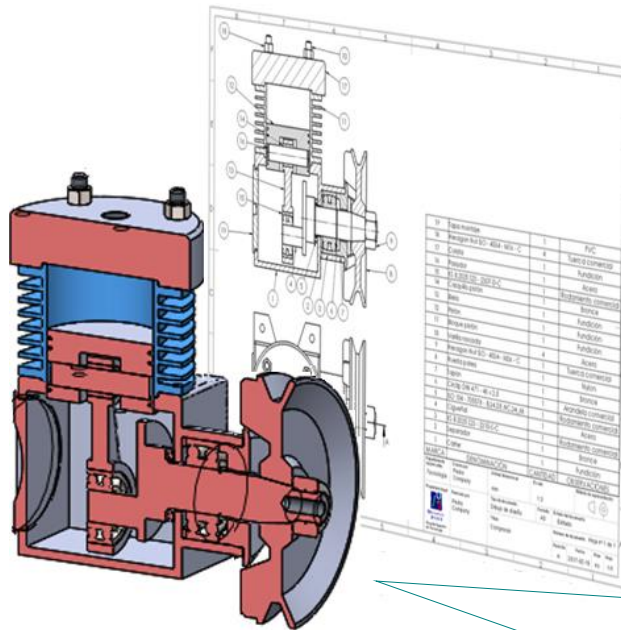
Trazado

Lugares geom.

La transformación de proyección da lugar a **vistas** que permiten representar objetos tridimensionales mediante figuras planas



Por tanto, la proyección se usa en las aplicaciones CAD 3D para **visualizar** los modelos tridimensionales en pantallas planas, y para producir dibujos de los modelos



Las vistas pueden incluir solo las aristas y contornos...

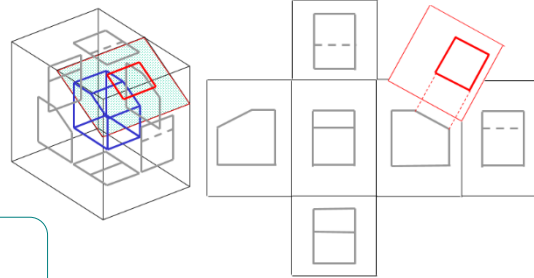
...o también colores y sombreados que producen representaciones más realistas

Transformaciones: de proyección

Hay dos tipos de vistas:

✓ **Ortográficas**
(UNE-EN-ISO 5456-2)

Facilitan las mediciones y construcciones geométricas



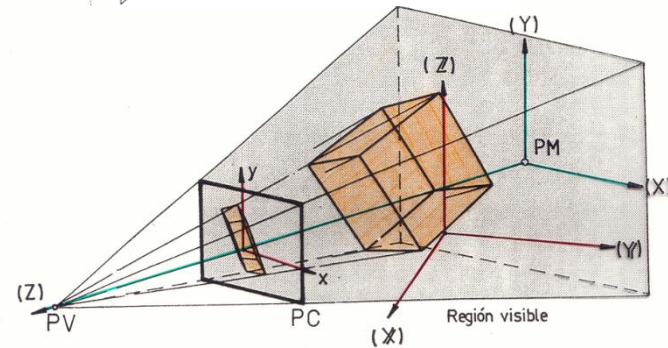
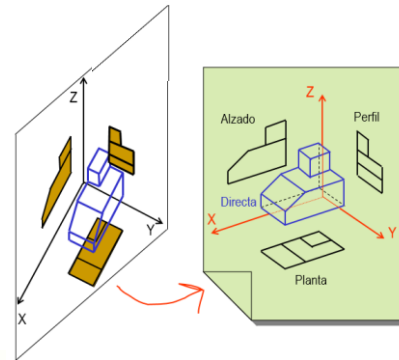
✓ **Pictóricas**

Facilitan la percepción tridimensional de los cuerpos

✓ **Axonométrica**
(UNE-EN-ISO 5456-3)

✓ **Central**
(UNE-EN-ISO 5456-4)

Esta variante de vista pictórica incluye percepción de profundidad



Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Trazado (representación geométrica)

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Los **principios** de utilización de las técnicas clásicas de *trazado* (también denominado *representación geométrica*) son:

- ✓ Son válidas todas las figuras que se puedan trazar de forma geoméricamente exacta, mediante un **instrumento de trazado y/o medición**
- ✓ Son válidas las figuras (generalmente puntos) que se obtienen como **intersecciones** directas entre figuras exactas
- ✓ En los dibujos CAD, los instrumentos de trazado clásicos (regla y compás) pueden reemplazarse por **instrumentos virtuales** que permitan construir una mayor variedad de figuras geométricas exactas

Trazado (representación geométrica)

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

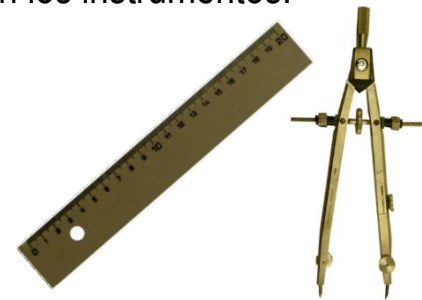
Trazado

Lugares geom.

Con los dos instrumentos básicos se pueden obtener todas las construcciones geométricas, a partir de cinco construcciones elementales

Dos de las construcciones se obtienen directamente con los instrumentos:

- ✓ Se admite que con una **regla** es posible trazar una recta que pasa por dos puntos cualesquiera
- ✓ Y es posible prolongar indefinidamente una recta
- ✓ Se admite que con el **compás** es posible trazar una circunferencia centrada en cualquier punto y de radio arbitrario



Las otras tres construcciones se obtienen por intersección entre figuras:

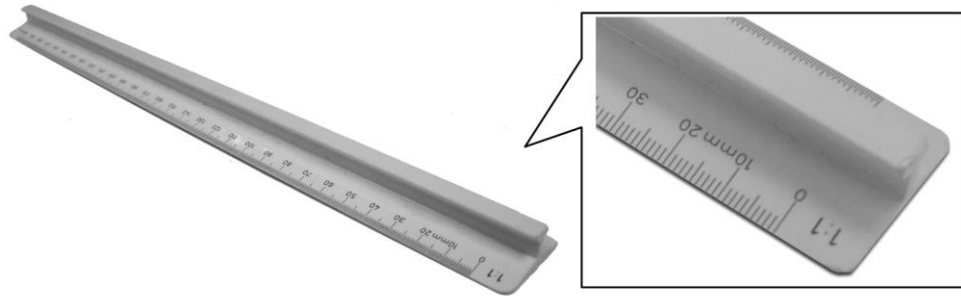
- ✓ Se puede obtener un punto como intersección de dos rectas
- ✓ Se puede obtener un punto como intersección de dos circunferencias
- ✓ Se puede obtener un punto como intersección de una circunferencia y una recta

Trazado (representación geométrica)

Los dos instrumentos de medida básicos son:

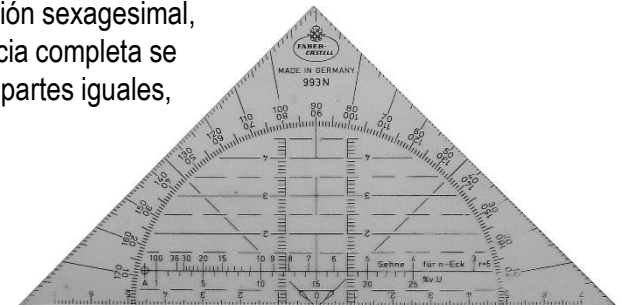
- ✓ La **regla graduada** tiene su borde recto marcado con divisiones iguales a diferentes unidades de medida, usualmente milímetros y centímetros

Sirve para medir longitudes de segmentos o distancias entre dos puntos



- ✓ El **transportador de ángulos** (o goniómetro) es una plantilla circular, o un sector circular, con su contorno dividido en partes iguales, siguiendo diferentes graduaciones

En la graduación sexagesimal, la circunferencia completa se divide en 360 partes iguales,



Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Trazado (representación geométrica)

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

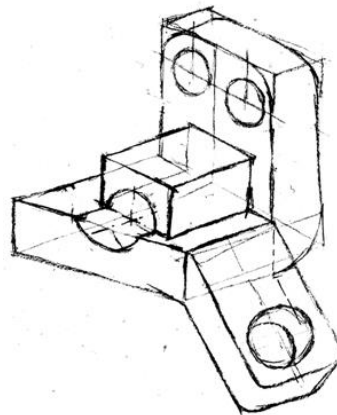
Lugares geom.

Las técnicas básicas de trazado cambian en dos situaciones distintas y opuestas:

Quando se realizan trazados aproximados mediante **croquis**, porque la precisión del trazado importa menos que la facilidad para comunicar información (aunque sea de manera fragmentada o inexacta)



Quando se dispone de las facilidades de trazado aumentadas que aportan un ordenador con una aplicación **CAD**



Más detalles sobre croquis en 1.0.5

Trazado (representación geométrica)

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

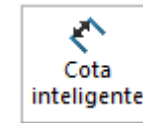
Trazado

Lugares geom.

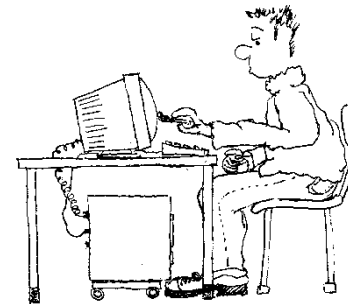


Los instrumentos tradicionales se amplían en las aplicaciones CAD:

- ✓ Cualquier instrumento virtual que permita trazar figuras geoméricamente exactas es válido
- ✓ Cualquier instrumento virtual que permita medir con exactitud es válido

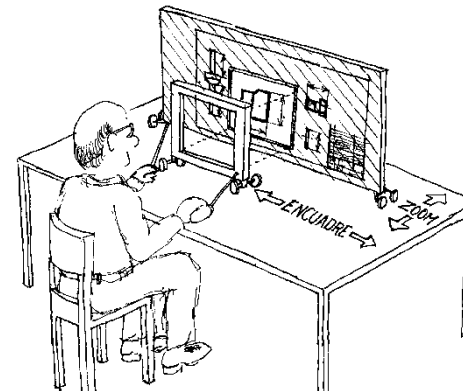


Pero el cambio de instrumentos requiere un cambio de hábitos...



¡No borres con líquido corrector en la pantalla!

...y hay que aprender a relacionarse con el dibujo de otra forma

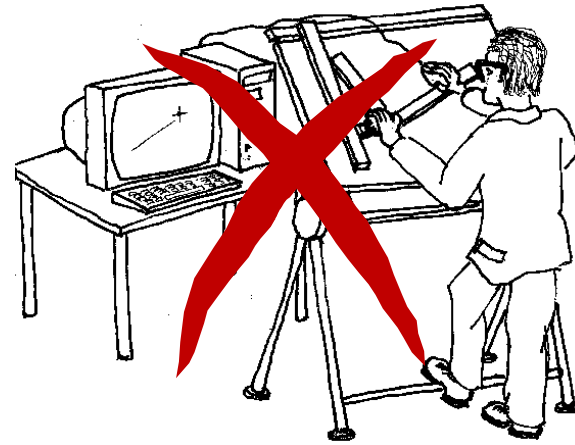


Trazado (representación geométrica)



Aunque el cambio más drástico con las aplicaciones CAD es que...

...el usuario **no** debe dibujar...



...debe impartir órdenes a la aplicación CAD, para que sea la aplicación la que realice el dibujo



Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Trazado (representación geométrica)



Las relaciones se añaden al dibujo de forma distinta según el tipo de trazado:

Implícitas ↔ Explícitas

Con **instrumentos de trazado tradicionales** (tanto físicos como virtuales), se utilizan construcciones geométricas que garantizan que las figuras trazadas cumplen las relaciones deseadas



Veremos que con **aplicaciones CAD paramétricas**, se indican explícitamente las relaciones que vinculan los elementos que conforman la figura

Por ejemplo, para que un extremo de un segmento coincida con un extremo de otro segmento previamente dibujado, se coloca la regla sobre el punto y se empieza a trazar con el lápiz también colocado en dicho punto

Por ejemplo, para que dos extremos de dos segmentos coincidan, se añade una restricción de coincidencia entre ambos

En los dibujos técnicos trazados de forma tradicional, solo las restricciones dimensionales (cotas) son explícitas



En los trazados CAD de tipo paramétrico, **todas las restricciones deben hacerse explícitas**

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

Trazado (representación geométrica)

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.



El dibujo geométrico se dice **paramétrico** cuando las coordenadas de los vértices no se fijan al dibujar, sino que se usan restricciones geométricas explícitas, para imponer requerimientos a la forma y/o el tamaño de las figuras



Las restricciones explícitas tienen el inconveniente de requerir cálculos para determinar la figura restringida...

...por lo que solo la disponibilidad de aplicaciones CAD las hace viables

El motor geométrico ("kernel") es el software que se encarga de resolver las figuras restringidas

Utiliza una rama de las matemáticas aplicadas y la geometría computacional para obtener algoritmos que describen y resuelven las formas geométricas

Esta rama puede verse como una evolución de la geometría métrica



Pero, las restricciones explícitas aportan dos ventajas principales:

- ✓ Muestran la intención de diseño
- ✓ Facilitan la construcción y edición de las figuras

Lugares geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

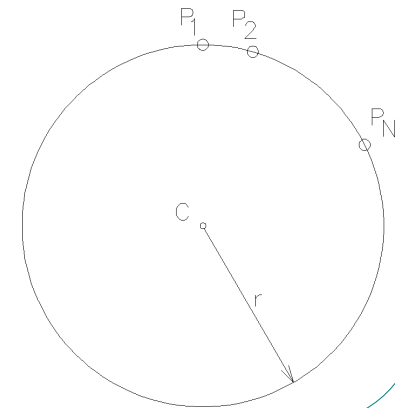
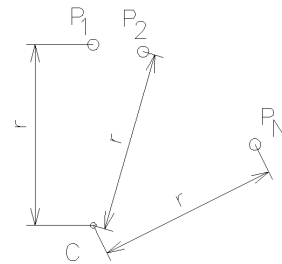
Lugares geom.

Un **lugar geométrico** es el conjunto de puntos que poseen una misma propiedad geométrica

Lo habitual es que un lugar geométrico tenga la forma de una figura geométrica

Un lugar geométrico será un conjunto vacío cuando se exija una condición imposible

Por ejemplo, la circunferencia es el lugar geométrico del conjunto de puntos del plano que están a una distancia dada (el radio) de un punto fijo (el centro)



Lugares geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.

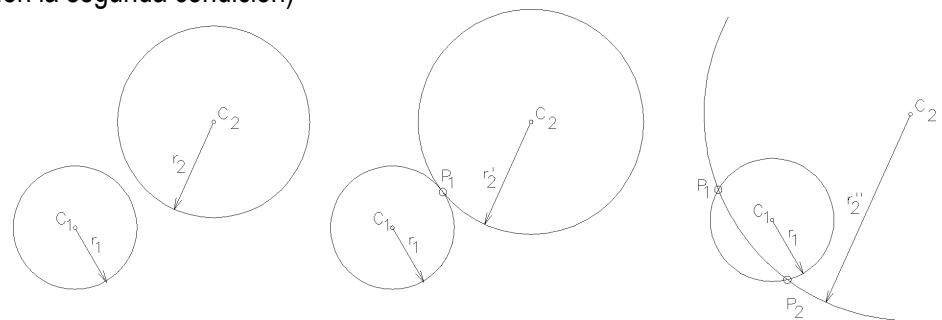
La resolución de muchos problemas geométricos consiste en encontrar figuras que cumplan un conjunto de condiciones

↳ La metodología de lugares geométricos permite encontrar una figura que cumpla una condición

↳ Encontrando tantos lugares geométricos como condiciones queramos imponer, obtendremos un conjunto de figuras, cuya intersección nos dará la solución buscada

Por ejemplo, para encontrar un punto que cumpla simultáneamente estar a una distancia r_1 del punto C_1 y a una distancia r_2 del punto C_2 , basta trazar una circunferencia de centro C_1 y radio r_1 (lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen la primera condición), y otra circunferencia de centro C_2 y radio r_2 (lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen la segunda condición)

Los puntos de corte de ambas circunferencias son aquellos puntos que cumplen simultáneamente ambas condiciones



Lugares geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

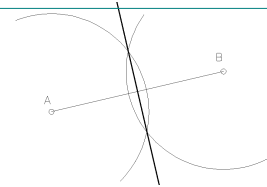
Trazado

Lugares geom.

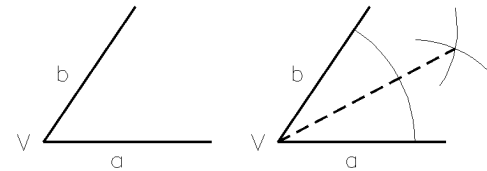
Algunos ejemplos notables de lugares geométricos son:

- √ La **mediatriz** de dos puntos es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambos

La mediatriz es una recta que pasa por el punto medio del segmento AB y el perpendicular a él



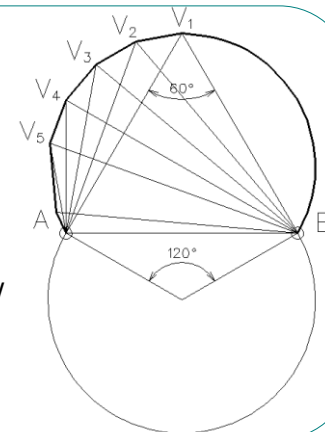
- √ La **bisectriz** es la recta que divide un ángulo en dos ángulos consecutivos e iguales



- √ **Arco capaz** es el lugar geométrico de los vértices de un ángulo de apertura constante y cuyos lados contienen respectivamente a dos puntos fijos A y B

El interés de éste lugar geométrico proviene de que adopta la forma de arco de circunferencia

Además, se puede utilizar la propiedad de que el ángulo cuyo vértice coincide con el centro del arco y que pasa por A y B (ángulo central) es doble del ángulo inscrito (ángulo que pasa por A y B y tiene su vértice en el arco capaz)



Lugares geométricos

Introducción

Elementos

Relaciones

Figuras

Transformaciones

Trazado

Lugares geom.



En las aplicaciones CAD, las figuras geométricas se manipulan algorítmicamente

Las figuras geométricas se manipulan mediante técnicas de análisis matemático y álgebra en un determinado sistema de coordenadas (geometría cartesiana), aplicando procedimientos derivados de la geometría analítica

Por tanto, los lugares geométricos se reemplazan por ecuaciones matemáticas

- ✓ Las relaciones entre elementos geométricos se convierten en ecuaciones matemáticas que expresan las condiciones que debe cumplir un elemento de una figura
- ✓ Los lugares geométricos se convierten en ecuaciones matemáticas que expresan las relaciones mutuas entre elementos
- ✓ La intersección entre lugares geométricos se reemplaza por la resolución de los sistemas de ecuaciones

En consecuencia, **la metodología de los lugares geométricos ha quedado relegada** a método complementario para resolver aquellos problemas geométricos que los motores geométricos de las aplicaciones CAD no pueden resolver directamente

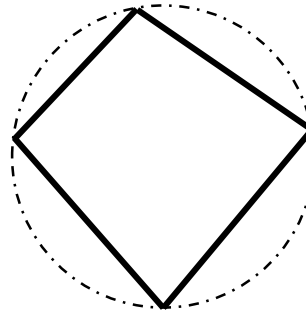
Lugares geométricos



Cabe notar que los lugares geométricos, empleados como **figuras auxiliares**, ayudan a restringir las figuras geométricas:

- ✓ Reducen notablemente el número de restricciones explícitas
- ✓ Muestran la intención de diseño que persigue el proceso de restricción

Por ejemplo, un polígono inscrito en una circunferencia está más cerca de convertirse en regular...



...y muestra dicha intención a través de la propia circunferencia

Introducción

Elementos

Relaciones

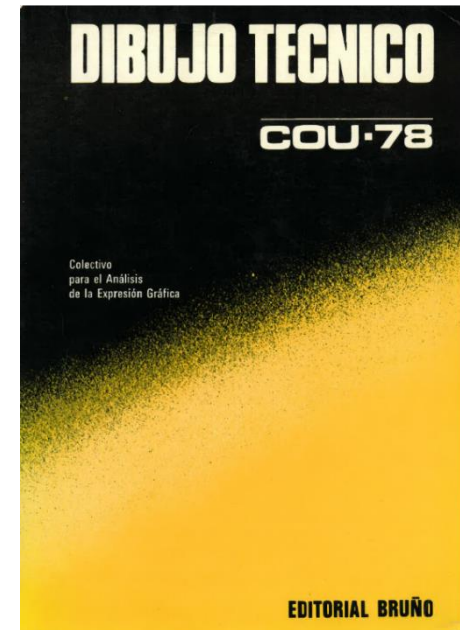
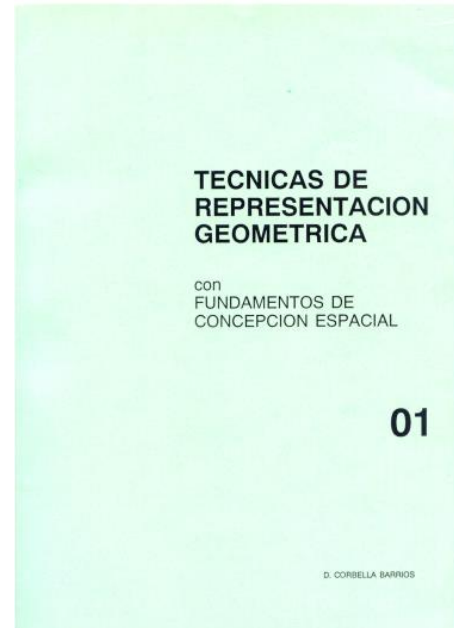
Figuras

Transformaciones

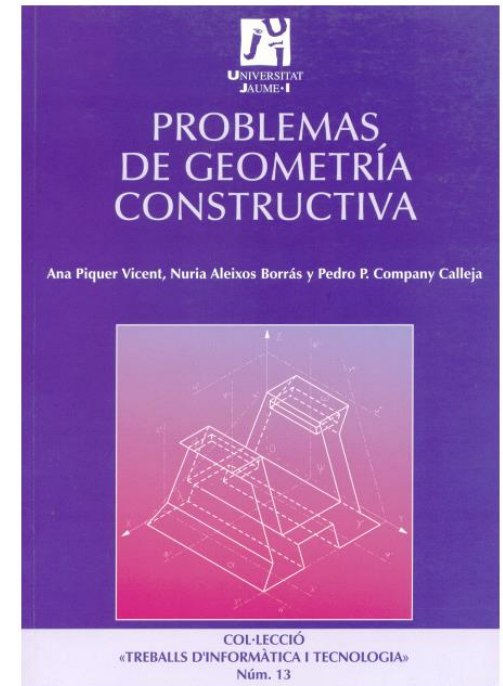
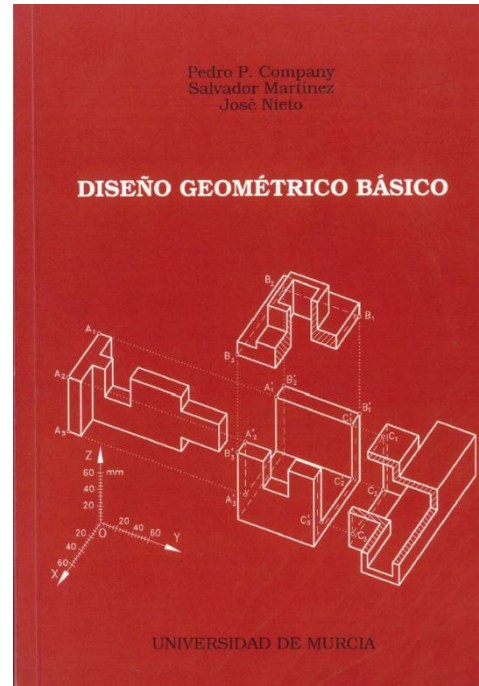
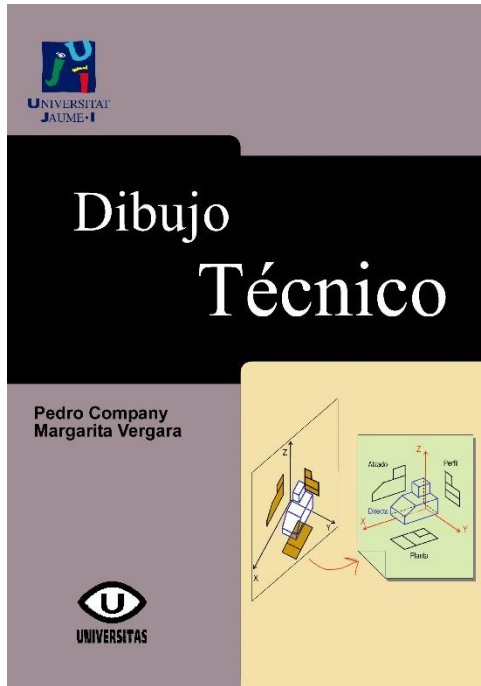
Trazado

Lugares geom.

Para repasar



Para repasar



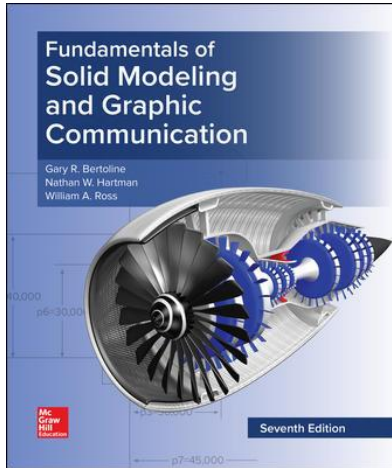
Disponible en:
<http://hdl.handle.net/10234/149987>

Para aprender más

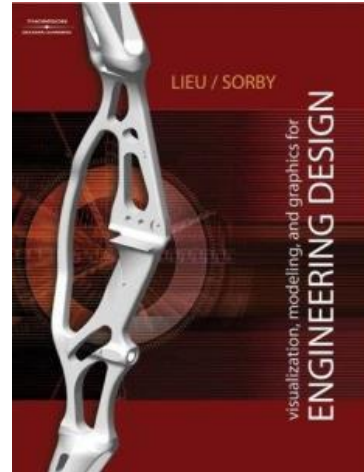
Cualquier buen libro de Geometría Descriptiva



Para aprender más



Section 3.15
Constraining
Profile Geometry
for 3-D Modeling

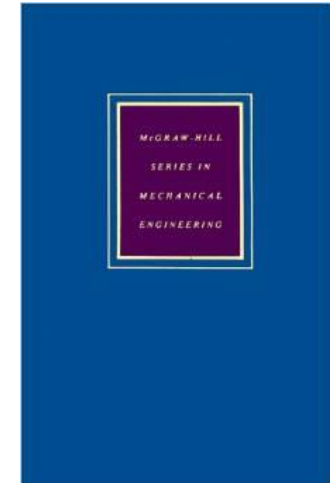


Chapter 6: Solid
Modeling

Section 6.04
Making it Precise



3. Strategie di
modellazione



Ibrahim Zeid
CAD/CAM Theory and
Practice
McGraw-Hill, 1991

Part II. Geometric
Modeling