

1.0.3

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Introducción

Introducción

Homologías

Movimientos

Homotecias

Productos

Una **transformación geométrica**, es una aplicación que convierte una figura en otra

Hay diferentes tipos de transformaciones:

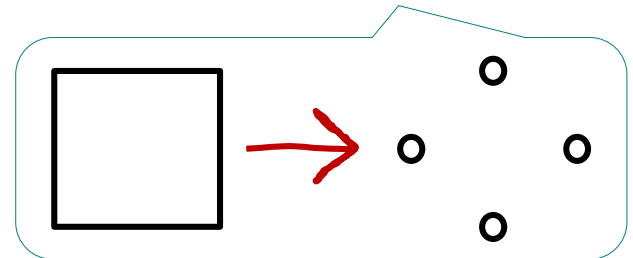
- ✓ La transformación es **homográfica** si hace corresponder a cada elemento de una especie, otro elemento de la misma especie



Las transformación se denomina **correlación** si establece correspondencia ente elementos de diferente especie

A cada punto del plano (o el espacio) le hace corresponder otro punto del plano (o el espacio)

La figura transformada se dice homóloga



La figura transformada se dice correlativa

- ✓ La transformación es **plana** si tanto la figura original como la imagen son planas
- ✓ La transformación es **proyección** si convierte una figura 3D en una figura 2D



Más detalles sobre proyecciones en 1.0.4

Homologías

Introducción

Homologías

Movimientos

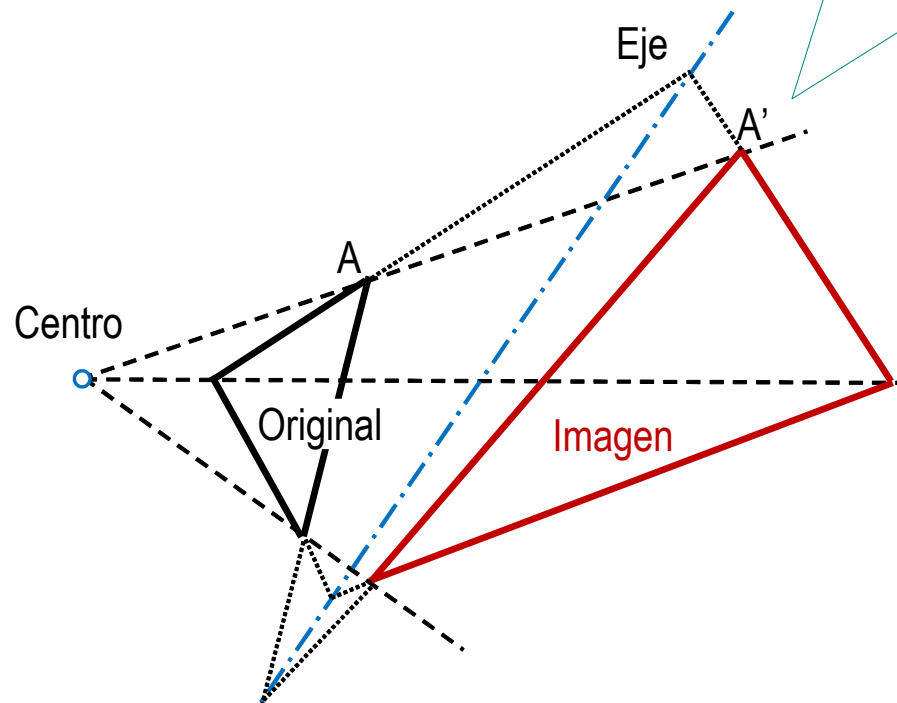
Homotecias

Productos

La homología es una transformación homográfica que cumple:

- ✓ Los puntos homólogos están alineados con el CENTRO
- ✓ Las rectas homólogas se cortan en el EJE

Debe notarse que los elementos definitorios de una homología son el eje, el centro y *un par de puntos homólogos*



Homologías

Introducción

Homologías

Movimientos

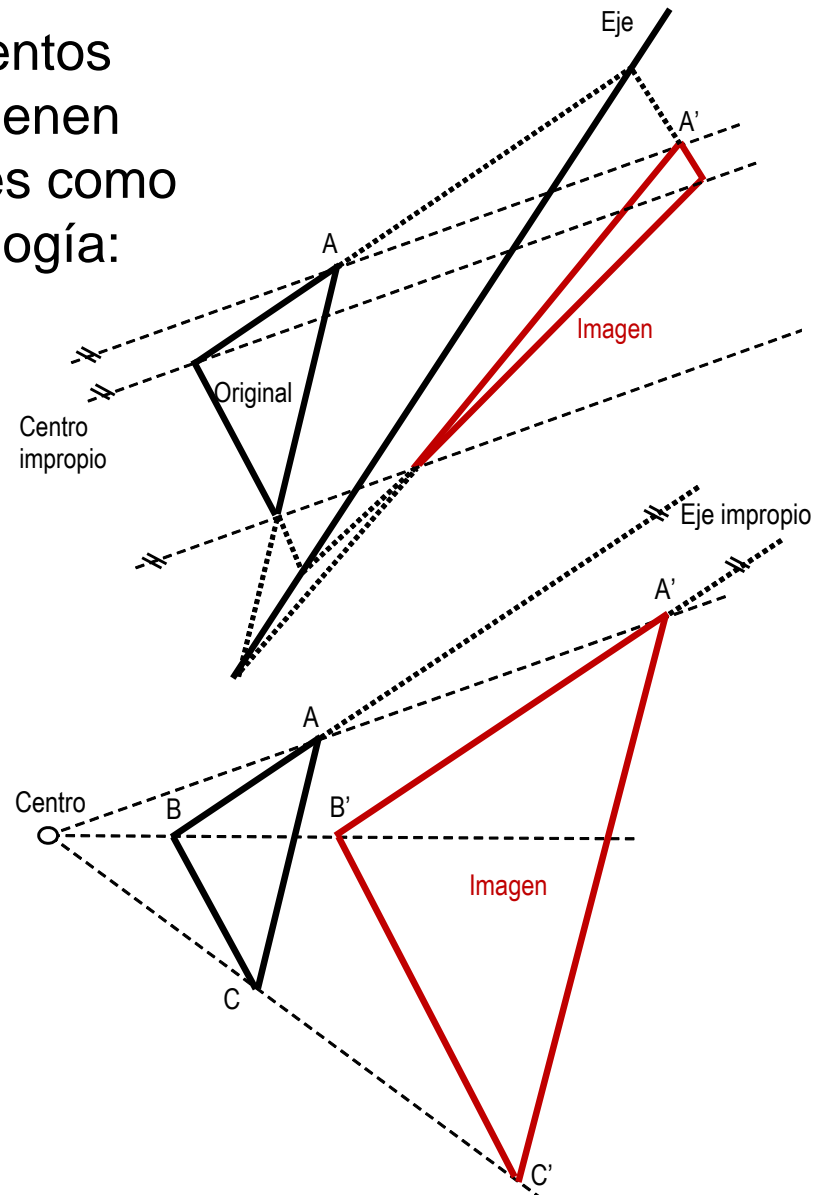
Homotecias

Productos



Si nos centramos en los elementos definitorios, vemos que se obtienen muchas transformaciones útiles como casos particulares de la homología:

- ✓ Si utilizamos un “centro impropio”, es decir, si las rectas que unen puntos homólogos son paralelas (se cortan en el infinito), obtenemos las **transformaciones afines**
- ✓ Si utilizamos un “eje impropio”, es decir, si las rectas homólogas son paralelas (se cortan en el infinito), obtenemos la **homotecia**



Homologías

Introducción

Homologías

Movimientos

Homotecias

Productos

Si atendemos a las propiedades de las figuras transformadas, obtenemos diferentes **tipos** en función de los *invariantes*:

Las propiedades de una figura que persisten frente a una transformación

- ✓ Las transformaciones son **isométricas** si conservan la forma y las medidas (distancias, ángulos y áreas)
- ✓ Las transformaciones son **isomórficas** si conservan la forma y las medidas son proporcionales

Se entiende por **conservar la forma** (o ser topológicamente equivalentes) tener los mismos elementos (puntos y líneas) y las mismas relaciones (estar conectados de la misma forma)

Pero se distinguen dos tipos de transformaciones, dependiendo de si se conserva el sentido:

- ✓ Las transformaciones son **directas** si conservan el sentido del plano orientado
- ✓ Las transformaciones son **inversas** en caso contrario

Homologías

Introducción

Homologías

Movimientos

Homotecias

Productos

Podemos clasificar las transformaciones en dos tipos principales:

- ✓ Los **movimientos** son transformaciones isométricas que producen figuras **congruentes**

Los movimientos conservan forma y tamaño

- ✓ Las **homotecias** son transformaciones isomorfas que producen figuras **semejantes**

Las homotecias conservan forma y producen tamaños "escalados"

Además, hay que tener en cuenta que se pueden obtener transformaciones por combinación o **producto** de otras transformaciones

Movimientos

Los **movimientos rígidos** son transformaciones isométricas:

- ✓ Las figuras son topológicamente equivalentes Es decir, tienen los mismos elementos conectados de la misma forma
- ✓ Las líneas imagen son iguales a las originales
- ✓ Los ángulos imagen son iguales a los originales
- ✓ El área de la figura imagen es igual a la de la original

Los dos tipos principales de **movimientos rígidos** son:

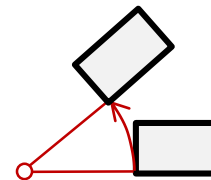
✓ Traslación

Todos los puntos de la figura original se desplazan en la misma dirección y la misma longitud



✓ Rotación

Todos los puntos de la figura original giran el mismo ángulo alrededor de un mismo punto fijo



Movimientos

Introducción

Homologías

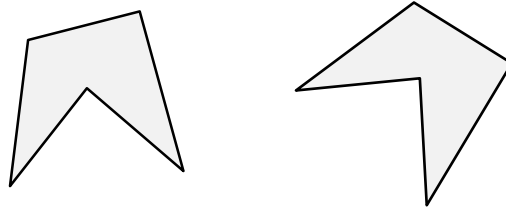
Movimientos

Homotecias

Productos

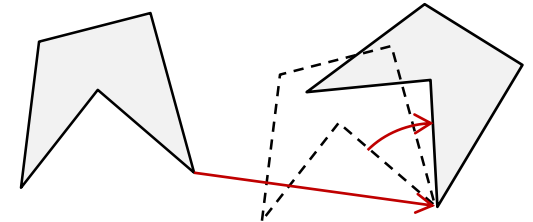


Dos figuras son **congruentes** cuando coinciden todas sus características formales y métricas



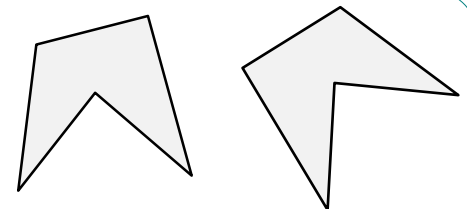
Por semejanza con la igualdad de los números, dos figuras congruentes se suelen denominar “iguales”

Entre dos figuras congruentes siempre existe una isometría, o producto de isometrías, que superpone una sobre la otra



Según la definición más estricta, dos figuras solo pueden ser congruentes cuando tienen el mismo sentido en el plano

Una figura plana deja de ser congruente con ella misma, al cambiar el sentido del plano que la contiene



Pero con una interpretación más amplia, se acepta que existe **congruencia directa e inversa**

Movimientos

Introducción

Homologías

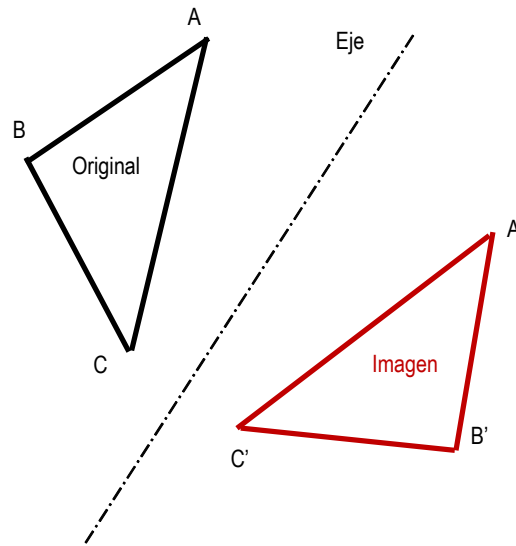
Movimientos

Homotecias

Productos

Si se acepta cambio de sentido, la **simetría bilateral** puede incluirse entre los movimientos rígidos

- ✓ Todos los movimientos conservan las relaciones de incidencia y ordenación de los puntos
- ✓ Los movimientos directos (traslaciones y giros) mantienen el sentido en el plano
- ✓ Los movimientos inversos (simetría bilateral) invierten el sentido en el plano



Movimientos

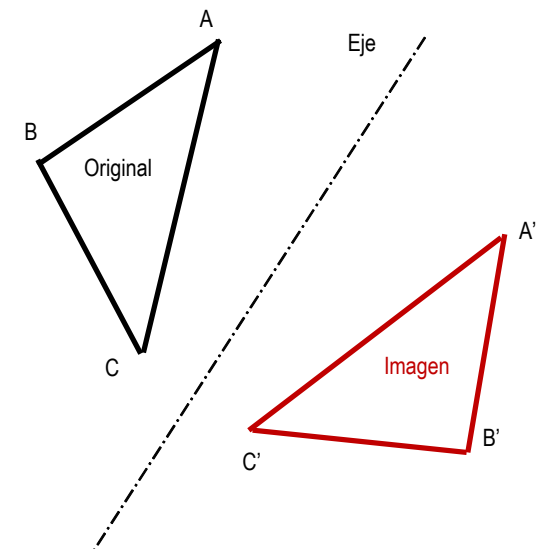
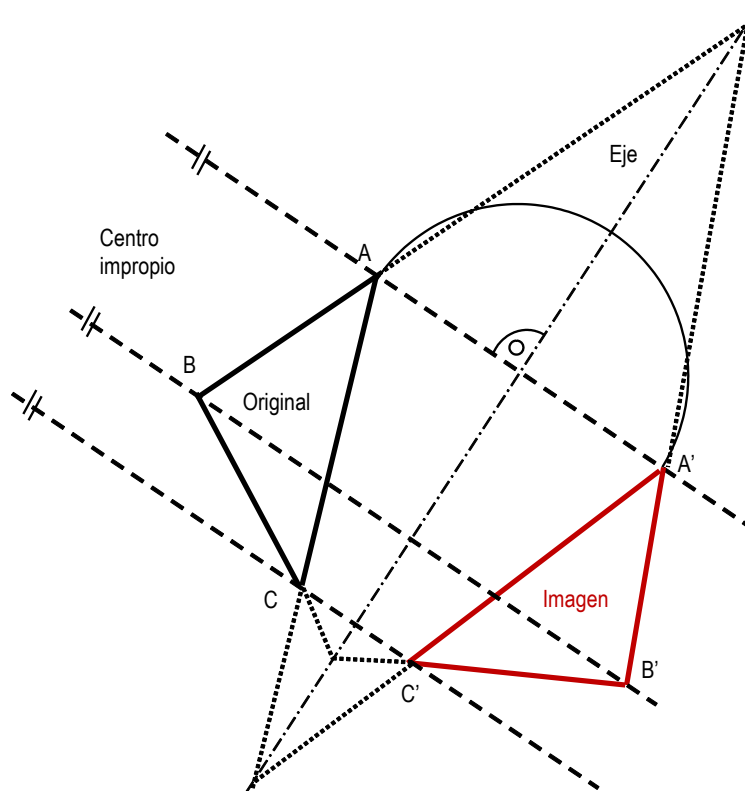


La simetría bilateral puede clasificarse como afinidad o como movimiento

Por procedimiento constructivo, es una homología afín, en la que la dirección de afinidad es perpendicular al eje de homología y los puntos homólogos son equidistantes del eje



Por invariantes, es un movimiento en el que se conserva la forma y el tamaño, aunque cambia el sentido



Homotecias

Introducción

Homologías

Movimientos

Homotecias

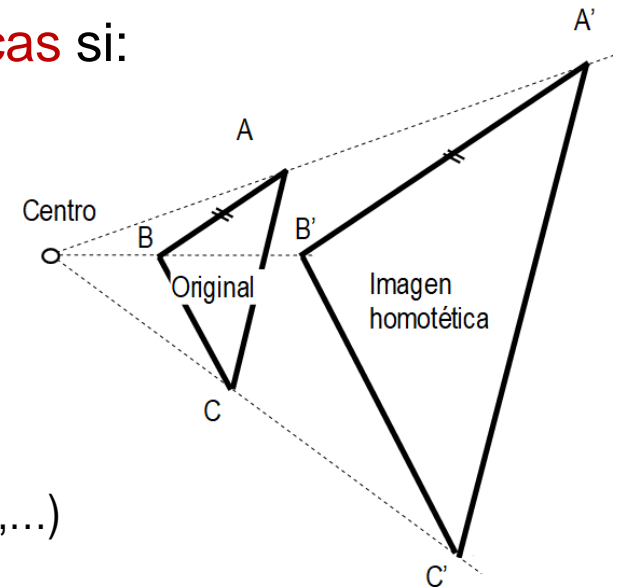
Productos

Dos figuras geométricas se dicen isomórficas o **proporcionales** si:

- ✓ Las figuras son topológicamente equivalentes
- ✓ Sus ángulos son iguales
- ✓ Sus líneas son todas proporcionales, con la misma razón

En particular, se dice que son **homotéticas** si:

- ✓ Son topológicamente equivalentes
- ✓ Los puntos homólogos (A y A' , B y B' , ...) están alineados con un punto fijo denominado centro de la homotecia
- ✓ Las rectas homólogas (AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, ...) son paralelas



Homotecias

Introducción

Homologías

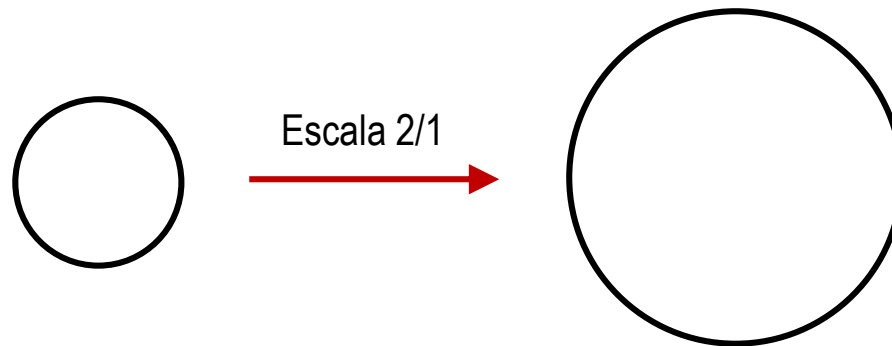
Movimientos

Homotecias

Productos

Se dice que entre figuras homotéticas hay una relación de **proporción** o “escala” porque:

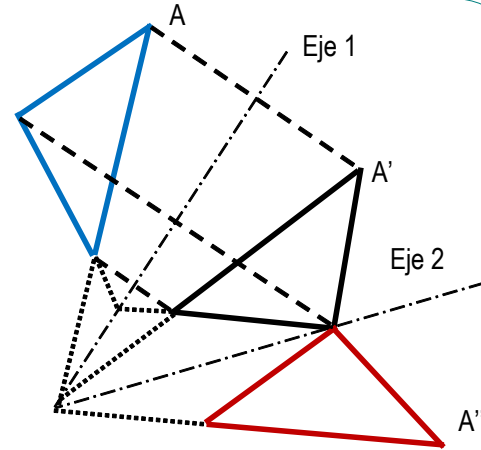
- ✓ Las distancias al centro de cada punto y su homólogo guardan una misma proporción denominada razón de homotecia ($OA'/OA = OB'/OB = \dots = k$)
- ✓ Las rectas homotéticas también guardan la misma razón de homotecia ($A'B'/AB = B'C'/BC = \dots = k$)
- ✓ La razón es positiva cuando ambas figuras están a un mismo lado del centro, y negativa en caso contrario



Productos

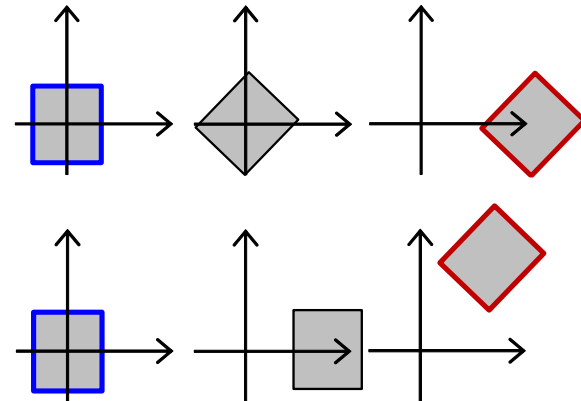
Combinando transformaciones podemos obtener nuevas transformaciones

Por ejemplo, obtenemos una rotación por combinación de simetrías bilaterales de ejes concurrentes



Pero se debe recordar que el orden del producto de las transformaciones afecta al resultado

Por ejemplo, girar primero y trasladar después, no da el mismo resultado que trasladar primero y girar después

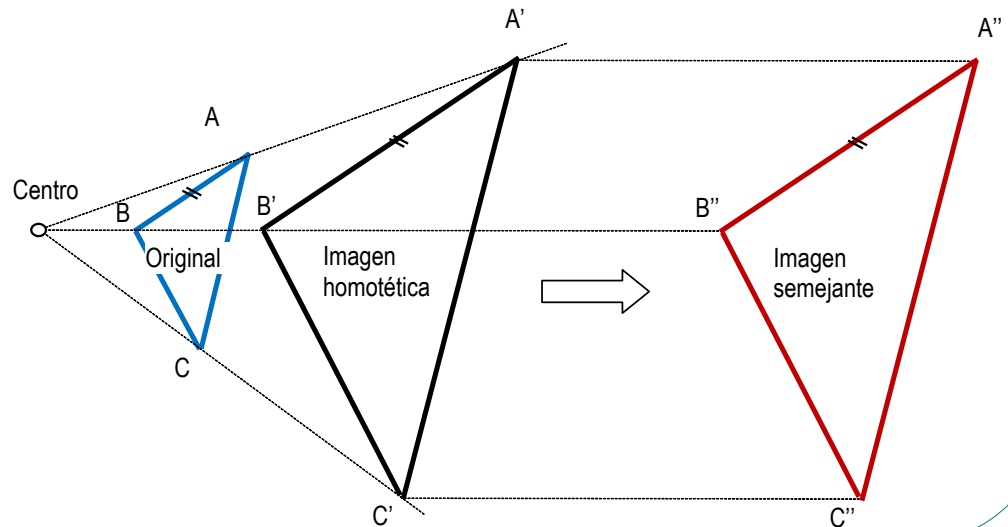


- Introducción
- Homologías
- Movimientos
- Homotecias
- Productos**

Productos

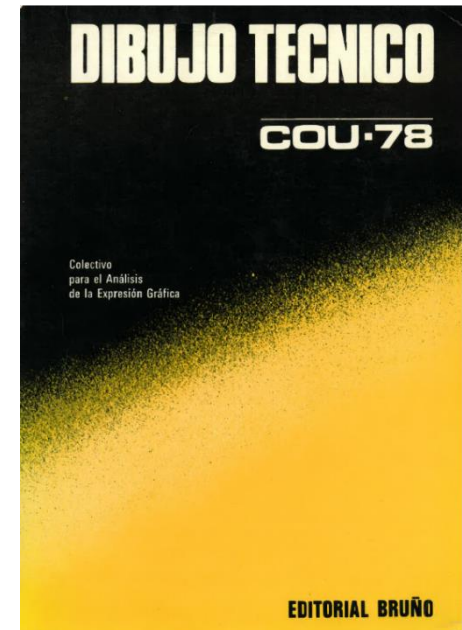
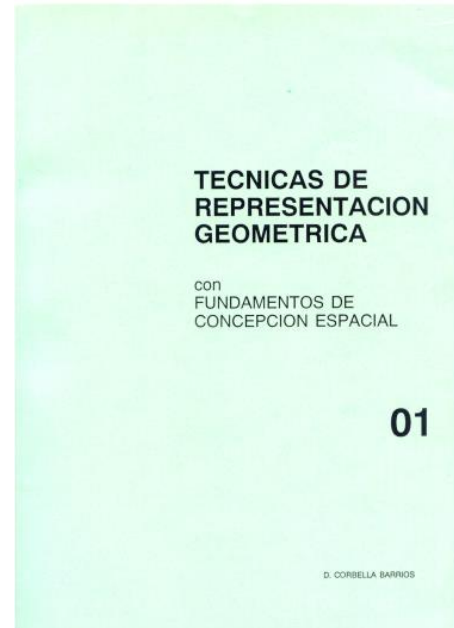
Un producto particular de dos transformaciones da lugar a la **semejanza**

Si movemos la imagen de una transformación homotética, la relación deja de ser homotética (porque los puntos dejan de estar alineados con el centro), pero se conserva la proporción de tamaño y la igualdad de forma

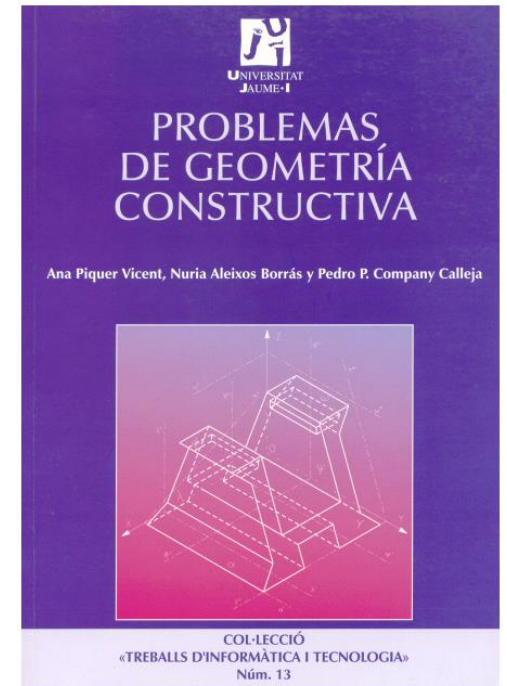
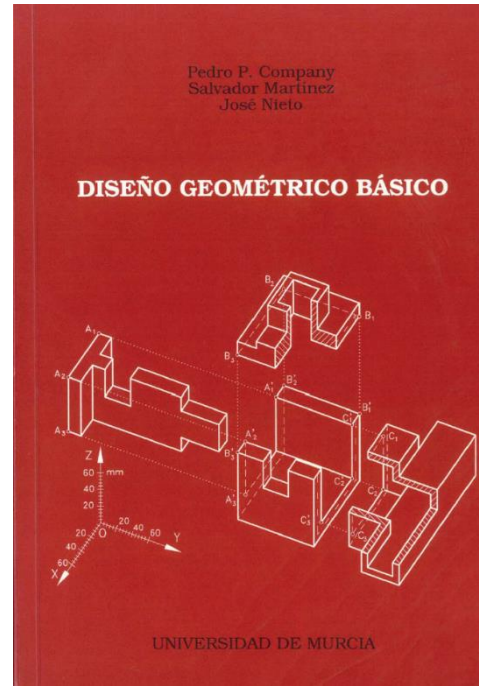
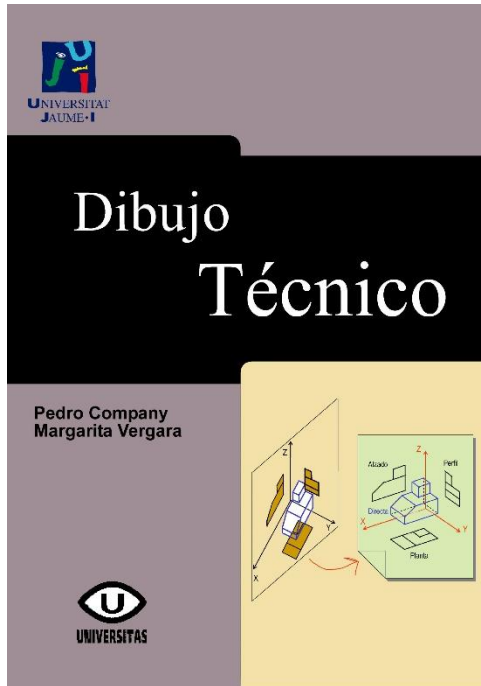


Se dice que entre figuras semejantes hay una **relación de escala**

Para repasar

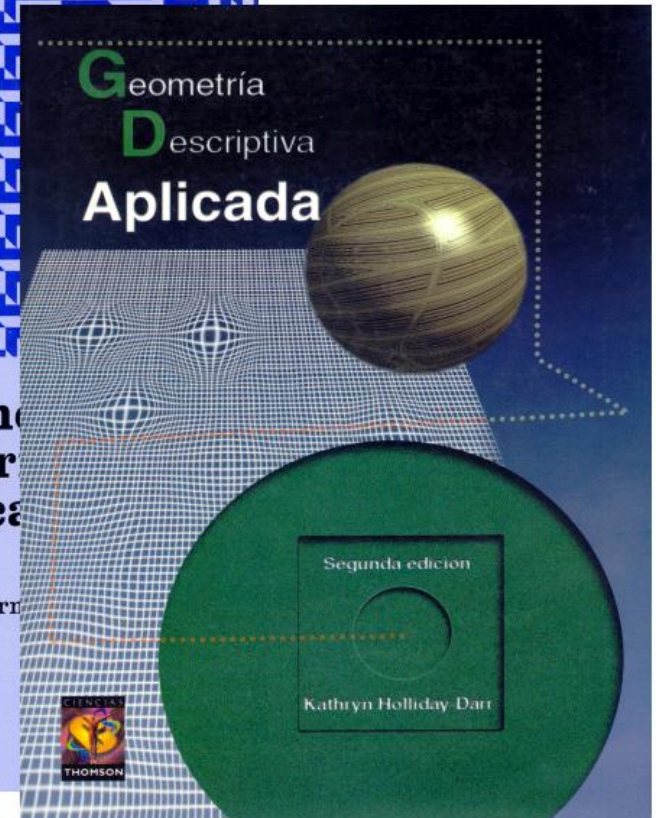
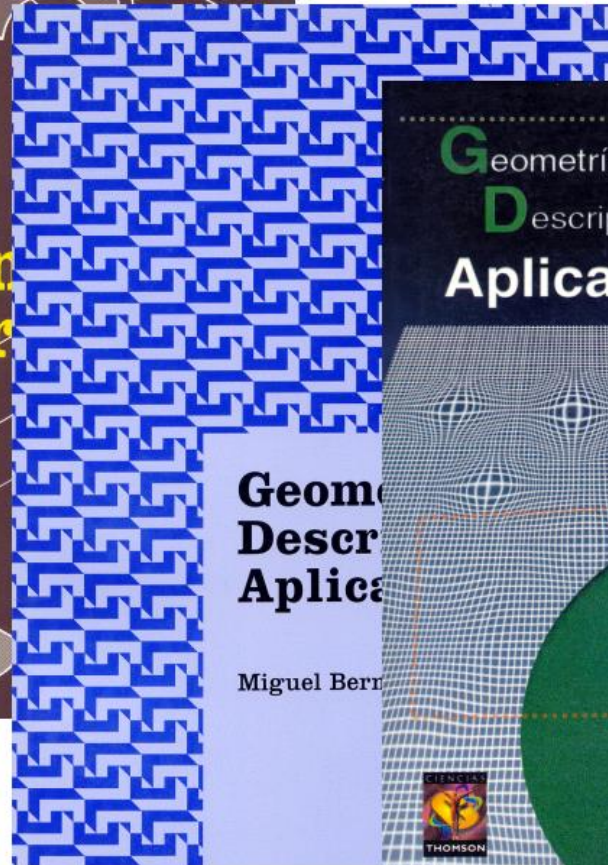


Para repasar

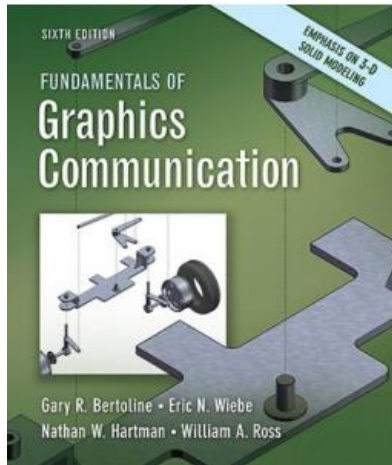


Para aprender más

Cualquier buen libro de Geometría Descriptiva

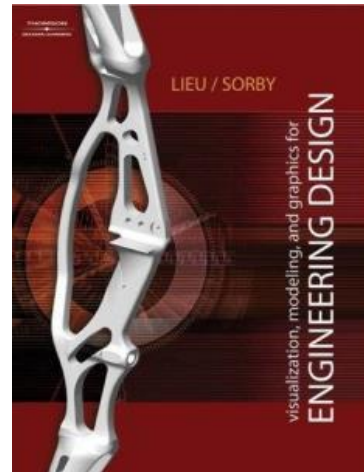


Para aprender más



Chapter 3:
Engineering
Geometry

Section 3.8
Constraining
Profile Geometry
for 3-D

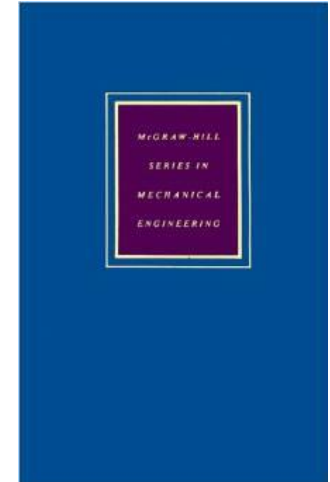


Chapter 6: Solid
Modeling

Section 6.04
Making it Precise



3. Strategie di
modellazione



Ibrahim Zeid
CAD/CAM Theory and
Practice
McGraw-Hill, 1991

Part II. Geometric
Modeling